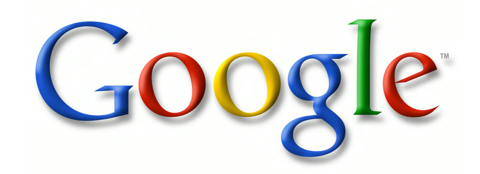
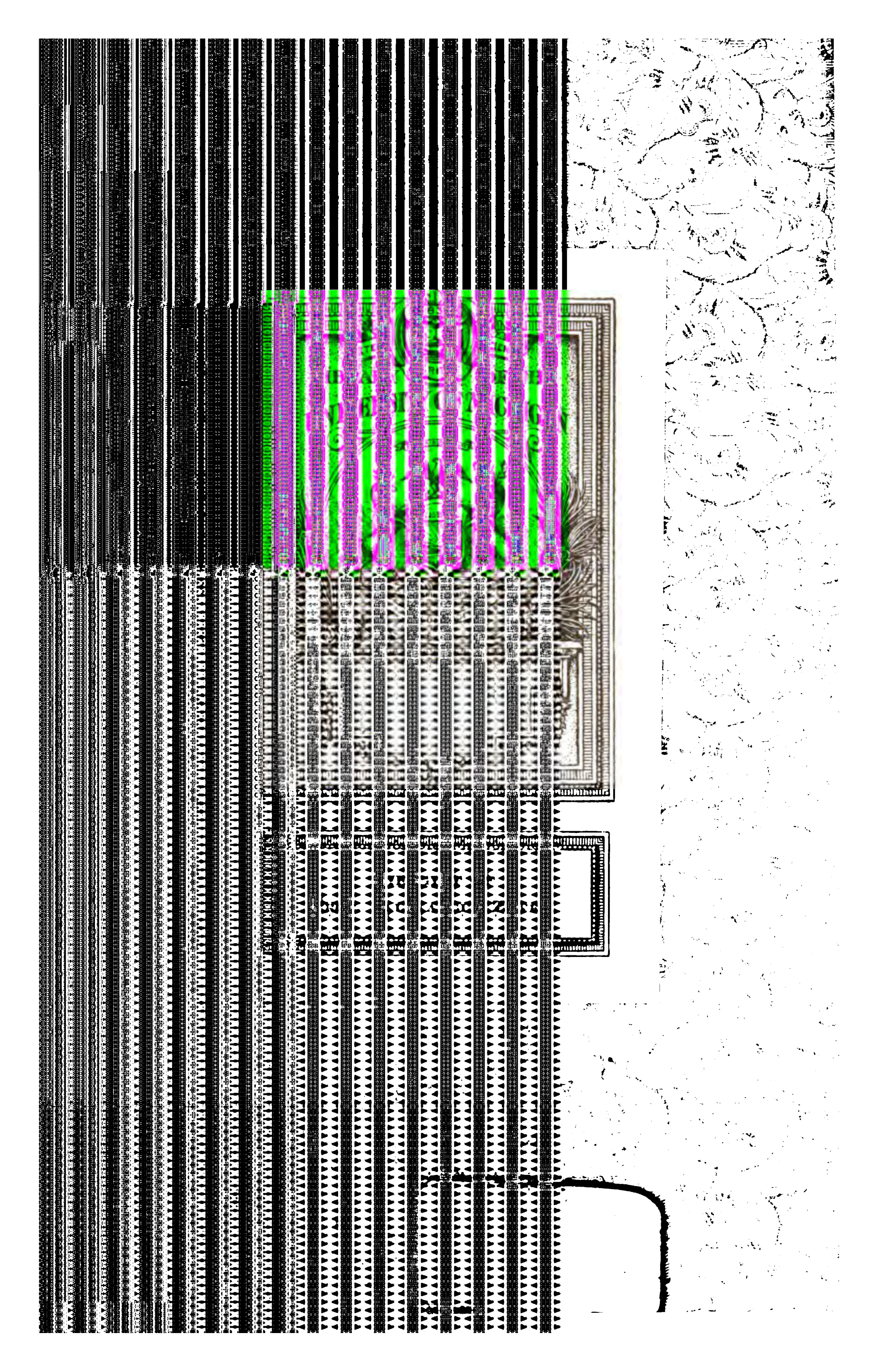
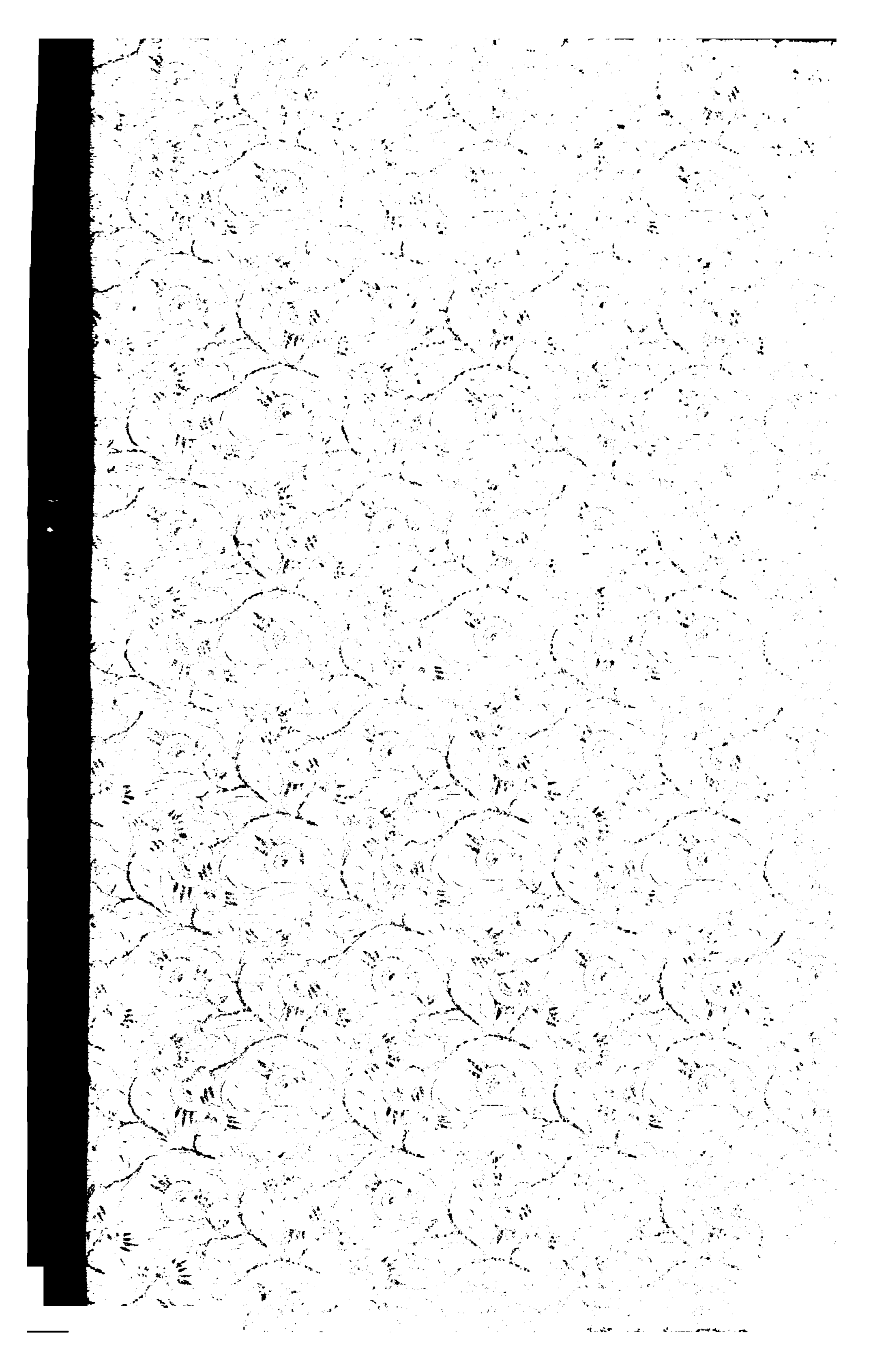

Google





DIE

THEORIE DES SCHALLES.

---

649 Alexander Ziwet 11,8

DIE

THEORIE DES SCHALLES

VON

J. W. STRUTT, BARON RAYLEIGH, M. A., F. R. S.

Früher Fellow of Trinity College, Cambridge.

AUTORISIRTE DEUTSCHE AUSGABE.

ÜBERSETZT

VON

Dr. FR. NEESEN,

Professor der Physik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule
zu Berlin und Privatdocent an der Universität Berlin.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

ERSTER BAND.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1880.

Alex. Ziwet
gt.
9-2-1922
2 vols.

VORREDE DES ÜBERSETZERS.

Auf Veranlassung von Herrn Geh.-Rath Helmholtz habe ich es unternommen, Lord Rayleigh's Theory of Sound ins Deutsche zu übertragen. Wenn eine Autorität gerade in akustischen Untersuchungen, wie Herr Helmholtz, eine deutsche Ausgabe des genannten Werkes für höchst wünschenswerth hält, so spricht dieser Umstand von selbst schon für die Gediegenheit und den Reichthum an Inhalt dieses Buches. Herr Helmholtz spricht sich über den Werth von Rayleigh's Theory of Sound in einer Besprechung der englischen Originalausgabe des vorliegenden ersten Bandes in der Zeitschrift „Nature“ folgendermaassen aus:

„Der Autor wird sich den höchsten Dank aller derjenigen verdienen, welche Physik und Mathematik studiren, wenn er das Werk in derselben Weise, in welcher er dasselbe in dem ersten Bande begonnen hat, fortsetzt .... Der Autor hat es durch die sehr zweckmässige systematische Anordnung des Ganzen möglich gemacht, dass die schwierigsten Probleme der Akustik jetzt mit grösserer Leichtigkeit wie früher studirt werden können.“

Der Leser wird diesen Worten nach Durchsicht des Werkes gewiss beistimmen. Ich hoffe nur, dass mir einigermaassen die schwierige Aufgabe gelungen ist, den englischen Text richtig und in lesbarem Deutsch wiederzugeben.

In dem Originale sind Bezeichnungen und Sätze benutzt, die aus Thomson's und Tait's Natural philosophy herrühren. Da letzteres Werk vielleicht nicht so allgemein durch und durch bekannt ist, habe ich, wo es mir zweckmässig erschien, die betreffenden Paragraphen der deutschen Uebersetzung desselben von Helmholtz und Werthheim neben die Paragraphen des vorliegenden Buches geschrieben.

Es fanden sich in der englischen Ausgabe einige Druckfehler, welche in der deutschen Ausgabe natürlich beseitigt wurden.

Meinen wärmsten Dank habe ich Lord Rayleigh selbst und Herrn Geh.-Rath Helmholtz auszusprechen, die mich bei Uebersetzung schwieriger Stellen mit ihrem Rath unterstützten, vor Allem aber Herrn Professor Wangerin, welcher in der liebenswürdigsten Weise manche Stunde geopfert hat, um mir mit seinen Kenntnissen und seinem Rath beizustehen.

San Remo, März 1879.

Professor Dr. F. Neesen.

VORREDE DES VERFASSERS.

In dem Werke, dessen Anfang der vorliegende Band bildet, will ich dem Leser eine zusammenhängende Auseinandersetzung der Theorie des Schalles geben, welche die wichtigsten Fortschritte enthält, die in neuerer Zeit von Mathematikern und Physikern in dieser Disciplin gemacht sind. Die Wichtigkeit des Gegenstandes, den ich im Auge hatte, wird, wie ich glaube, von den hierüber zum Urtheilen Berechtigten nicht angezweifelt. Gegenwärtig finden sich viele der werthvollsten Beiträge zur Wissenschaft nur in zerstreuten periodischen Journalen und Verhandlungen von Gesellschaften und zwar sowohl in den verschiedensten Theilen der Erde, wie in den verschiedensten Sprachen veröffentlicht. Oft sind sie allen denjenigen, welche nicht das Glück haben, in der Nähe von grossen öffentlichen Bibliotheken zu leben, ganz unzugänglich. Bei solch einer Lage der Dinge veranlassen die mechanischen Hindernisse gegen das Studium einen so grossen Aufwand von nicht lohnender Arbeit und hindern in Folge dessen den Fortschritt der Wissenschaft in einer Weise, wie es schwerlich überschätzt werden kann.

Nach dem wohl bekannten Artikel über den Schall in der Encyclopaedia Metropolitana von Sir John Herschel (1845) ist kein vollständiges Werk veröffentlicht, in welchem der vorliegende Gegenstand sich mathematisch behandelt findet. Durch den vorzeitigen Tod von Prof. Donkin wurde die wissenschaftliche Welt eines Mannes beraubt, dessen mathematische Talente in Verbindung mit einer praktischen Kenntniss der Physik ihn in einer ganz besonderen Weise befähigten, über den Schall zu schreiben. Der erste Theil seiner Akustik (1870), obgleich wenig mehr wie ein Fragment, genügt, um zu zeigen, dass meine Arbeit unnöthig gewesen wäre, wenn Prof. Donkin lange genug gelebt hätte, um sein Werk zu vollenden.

Bei der Auswahl der in einem Werke über den Schall zu behandelnden Punkte bin ich zum grössten Theil dem Beispiel meiner Vorgänger gefolgt. Die Theorie des Schalles, sowie sie gewöhnlich verstanden wird, deckt sich auf einem grossen Bereich mit der allgemeinen Theorie der Schwingungen; indessen würde, wenn man nicht den Gegenstand etwas begrenzte, die Betrachtung solcher Probleme, wie das der Ebbe und Fluth, nicht zu sprechen von optischen Problemen, einzuschliessen sein. Als allgemeine Regel wollen wir uns auf diejenige Classe von Schwingungen beschränken, für welche unser Ohr ein leicht zugängliches und wunderbar empfindliches Untersuchungsinstrument darbietet. Ohne die Ohren würden wir uns um Schwingung kaum mehr kümmern, wie ohne Augen über Licht.

Der vorliegende Band enthält Capitel über Schwingungen von Systemen im Allgemeinen, in denen man, wie ich hoffe, einige neue Behandlungsweisen und Resultate finden wird, die sich aus einer detaillirteren Betrachtung specieller Systeme, wie gespannte Saiten, Stäbe, Membranen und Platten, ergeben haben. Der zweite Band, von dem schon

ein beträchtlicher Theil geschrieben ist, wird mit den Schwingungen lichtförmiger Körper beginnen.

Grossen Dank schulde ich Herrn H. M. Taylor vom Trinity College zu Cambridge, der die Güte hatte, die Correcturbogen zu lesen. Durch seine freundliche Beihülfe wurden verschiedene Irrthümer und Undeutlichkeiten beseitigt, sowie der Band im Allgemeinen weniger unvollkommen gemacht, wie er sonst gewesen wäre.

Für jede Berichtigung oder Rathschläge zu Verbesserungen, welche mir meine Leser gütigst zukommen lassen werden, werde ich sehr dankbar sein.

Terling Place Witham.
April 1877.

INHALTSVERZEICHNISS.

Erstes Capitel.

Zweites Capitel.

Drittes Capitel.

Viertes Capitel.

Fünftes Capitel.

Sechstes Capitel.

Siebentes Capitel.

Achtes Capitel.

Neuntes Capitel.

Zehntes Capitel.

Erstes Capitel.

Einleitung.

1. Die Empfindung des Schalles ist ein Etwas *sui generis*, welches mit keiner unserer anderen Empfindungen vergleichbar ist. Niemand kann eine Beziehung zwischen einem Klange einerseits und einer Farbe oder einem Geruche andererseits aufstellen. Alle mit unserm vorliegenden Gegenstande in Verbindung stehenden Fragen müssen auf directem oder indirectem Wege unserm Ohre, als dem Organ für das Hören, zur Entscheidung vorgelegt werden; von diesem giebt es keinen weiteren Appell. Hieraus dürfen wir aber nicht folgern, dass alle akustischen Untersuchungen nur mit dem Ohre, welches durch nichts Anderes unterstützt werden kann, geführt werden. Wenn wir erst die physikalischen Erscheinungen, welche das Fundament des Schalles bilden, entdeckt haben, dann werden unsere Untersuchungen zum grossen Theile auf ein anderes Feld übergeleitet, welches in dem Herrschaftsbereiche der Principien der Mechanik liegt. Auf diesem Wege ist man zu wichtigen Gesetzen gelangt, mit denen die Empfindungen unseres Ohres übereinstimmen müssen.

2. Ganz flüchtige Beobachtungen genügen oft, um anzuzeigen, dass tönende Körper sich in einem Schwingungszustande befinden, und dass die Erscheinungen des Schalles und der Schwingungen enge zusammenhängen. Berührt man eine

schwingende Glocke oder Saite mit dem Finger, so verschwindet der Schall in demselben Augenblicke, in welchem die Schwingung gedämpft wird. Um aber unser Gefühl des Hörens zu erregen, ist es nicht genug ein schwingendes Instrument zu haben; es muss auch eine ununterbrochene Mittheilung zwischen dem Instrumente und dem Ohre vorhanden sein. Eine im luftleeren Raume angeschlagene Glocke bleibt unhörbar, wenn geeignete Vorsichtsmaassregeln getroffen sind, um die Mittheilung von Bewegung zu verhindern. In der Luft der Atmosphäre findet dagegen der Schall einen immer bereiten Träger, welcher denselben ohne Unterbrechung von den verschiedenartigsten Quellen in das Innere des Ohres zu befördern im Stande ist.

3. Der Uebergang des Tones geschieht nicht augenblicklich. Wenn ein Geschütz in einiger Entfernung von uns abgefeuert wird, so trennt ein sehr deutlich bemerkbarer Zwischenraum an Zeit den Knall von dem Aufblitzen. Dieser Zwischenraum giebt die Zeit an, welche der Schall gebraucht, um von der Kanone bis zum Beobachter zu gelangen, da die Verzögerung des Aufblitzens, welche von der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes herrührt, vollständig vernachlässigt werden kann. Die ersten genauen Versuche in dieser Hinsicht wurden von einigen Mitgliedern der französischen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1738 angestellt. Kanonen wurden abgefeuert und die Verzögerung des Knalles in verschiedenen Entfernungen beobachtet. Die Hauptvorsicht, welche beachtet werden muss, ist die: die Richtung, längs deren der Schall vorwärts eilt, abwechselnd umzukehren, um den Einfluss der Bewegung von grösseren Luftmassen zu eliminiren. Mit dem Winde eilt z. B. der Schall der Erde gegenüber rascher vorwärts als ohne Wind, da die Geschwindigkeit des Windes sich zu der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ruhender Luft hinzuaddirt. Für ruhige, trockene Luft bei einer Temperatur von 0° C. fanden die französischen Beobachter eine Geschwindigkeit von 337 Meter in der Secunde. Beobachtungen derselben Art wurden angestellt im Jahre 1822 von Arago

und Anderen; von den holländischen Physikern Moll, van Beck und Kuytenbrouwer in Amsterdam; von Bravais und Martins zwischen dem Gipfel des Faulhorn und einem Orte am Fusse desselben; und noch von Anderen mehr. Als allgemeines Resultat ergab sich ein etwas geringerer Werth für die Geschwindigkeit des Schalles — ungefähr 332 Meter in der Secunde. Die Einwirkung von Temperatur und Druckänderungen auf die Fortpflanzung des Schalles wird am besten in Verbindung mit der mechanischen Theorie betrachtet.

4. Als eine direkte Folgerung aus den Beobachtungen ergiebt sich, dass innerhalb weiter Grenzen die Geschwindigkeit des Schalles unabhängig oder wenigstens nahezu unabhängig von der Intensität ist, und ebenso von der Tonhöhe. Wäre dies anders, so würde ein rasches Musikstück in geringer Entfernung auf alle Fälle verworren und im Missklange gehört werden. Wenn indess die Störungen sehr stark und plötzlich sind, so dass die dadurch hervorgerufene Dichtigkeitsänderung mit der Gesammtdichte der Luft vergleichbar ist, so kann vielleicht dieses einfache Gesetz der Unabhängigkeit der Geschwindigkeit von Intensität und Höhe nicht mehr zutreffen.

5. Eine sehr sorgfältige und vollkommene Reihe von Versuchen über die Fortpflanzung des Schalles in langen Röhren (Wasserröhren) ist von Regnault[1]) gemacht worden. Er wandte eine automatische Vorrichtung an, die im Principe der bei der Bestimmung der Geschwindigkeit von Geschossen benutzten ähnlich ist. In dem Augenblicke, in welchem man eine Pistole an dem einen Ende der Röhre abfeuert, wird durch den Schuss ein von einem elektrischen Strome durchflossener Leitungsdraht zerrissen. Dies bewirkt das Abreissen eines Zeichenstiftes, der vorher eine Linie auf einem sich umdrehenden Cylinder zog. An dem andern Ende der Röhre ist eine gespannte Membran so angebracht, dass, wenn dieselbe bei der Ankunft des Schalles dem Impulse desselben nachgiebt, der Strom, welcher während der Zeit, in der der

[1]) Mémoires de l'Académie de France, t. XXXVII.

Schall von dem einen Ende der Röhre zum andern lief, unterbrochen war, wieder hergestellt wird. In demselben Moment fällt der Zeichenstift wieder auf den Cylinder. Der unmarkirt gebliebene schwarze Strich in der Linie auf dem Cylinder entspricht der Zeit, welche der Schall während seines Weges gebrauchte, und giebt, wenn die Bewegung des Cylinders bekannt ist, die Mittel an jene zu bestimmen. Die Länge des Weges zwischen dem ersten Draht und der Membran wird durch direkte Messung gefunden. Bei diesen Versuchen schien sich zu ergeben, dass die Geschwindigkeit des Schalles nicht ganz unabhängig von dem Durchmesser der Röhre ist, welcher variirte zwischen 0,108 m und 1,100 m. Diese Verschiedenheit rührt vielleicht von der Reibung her, deren Einfluss in engeren Röhren grösser sein wird.

6. Obschon für gewöhnlich die Luft der Träger des Schalles ist, sind andere Gase, Flüssigkeiten und feste Körper doch gleichfalls im Stande, jene fortzuleiten. In den meisten Fällen entbehrt man aber der Mittel, eine direkte Messung der Geschwindigkeit des Schalles in anderen Substanzen wie Luft anzustellen; die indirekten Methoden aber zu betrachten sind wir augenblicklich noch nicht im Stande. Beim Wasser begegnet man indess derselben Schwierigkeit nicht. Im Jahre 1826 untersuchten Calladon und Sturm die Fortpflanzung des Schalles im Genfer See. Das Anschlagen einer Glocke auf einer Station geschah gleichzeitig mit dem Aufblitzen von Schiesspulver. Der Beobachter auf einer zweiten Station maass den Zwischenraum zwischen dem Aufblitzen und der Ankunft des Schalles, indem er sein Ohr an eine Röhre hielt, welche nahe der Wasseroberfläche angebracht war. Es fand sich, dass die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser bei 8^0 C. 1435 m in der Secunde war.

7. Die Fortleitung des Schalles durch feste Körper kann durch einen hübschen, Wheatstone zu verdankenden Versuch gezeigt werden. Das eine Ende eines Metalldrahtes ist mit dem Resonanzboden eines Klaviers verbunden, das andere Ende wird durch die Zimmer oder Flure in einen andern Theil des

Gebäudes gebracht, wo natürlich direkt von dem Klaviere nichts gehört werden darf. Wenn nun ein Resonanzboden (etwa der einer Violine) in Berührung mit dem Drahte gebracht wird, so wird eine auf dem Klaviere gespielte Melodie leicht gehört; der Schall scheint aus dem Resonanzboden zu kommen.

8. In einem offenen Raume nimmt die Intensität des Schalles mit grosser Geschwindigkeit ab, wenn die Entfernung von der Schallquelle wächst. Dieselbe Bewegungsmenge hat Flächen in Bewegung zu setzen, welche stets wie die Quadrate der Entfernungen von der Quelle wachsen. Jedes Ding, welches die Schallausbreitung einengt, wird das Sinken der Intensität zu vermindern streben. Daher pflanzt sich der Schall über die ebene Oberfläche des Wassers hin weiter fort, als über unebene Erdflächen; die Ecke zwischen glattem Steinpflaster und einer verticalen Wand ist noch mehr geeignet, den Schall möglichst stark fortzupflanzen; am wirksamsten hierzu ist aber eine röhrenähnliche Umhüllung, welche die Ausdehnung des Schalles ganz verhindert. Der Gebrauch von Sprachröhren zur Erleichterung von Mittheilungen zwischen verschiededenen Theilen eines Gebäudes ist wohl bekannt. Wenn nicht gewisse von den Wänden der Röhre herrührende Umstände (Reibung und andere) einwirkten, so würde der Schall durch Sprachröhren mit geringem Verluste auf sehr weite Distanzen fortgeleitet werden können.

9. Bevor wir weiter gehen, müssen wir einen Unterschied feststellen, welcher von grosser Wichtigkeit ist, obschon seine exacte Definition Schwierigkeiten bereitet.

Unter den Schallempfindungen kann man musikalische und unmusikalische unterscheiden; die ersteren mögen zweckmässig Klänge und die letzteren Geräusche genannt werden. Die extremen der diesen beiden Classen angehörenden Fälle werden nie einen Streit in Betreff ihrer Classificirung hervorrufen; Jedermann erkennt den Unterschied zwischen dem Klange eines Klaviers und dem Knarren eines Schuhes. Es ist indessen nicht so leicht, die Trennungslinie zu ziehen. Zunächst sind wenige

Klänge frei von jeder unmusikalischen Beigabe. Bei der Orgelpfeife z. B. kann das Zischen des Windes beim Entweichen aus dem Munde der Pfeife neben dem eigentlichen Klange der Pfeife gehört werden. Zweitens nehmen manche Geräusche in so fern einen musikalischen Charakter an, als sie eine bestimmte Höhe haben. Dies wird später, wenn wir z. B. die allgemeine Harmonie besprechen, leichter eingesehen, als wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf ein isolirtes Beispiel richten. Der Versuch zu dem eben Gesagten kann aber gemacht werden, indem man Korken aus Flaschen zieht, die vorher durch Eingiessen von Wasser abgestimmt sind, oder indem man Holzstücke von passender Grösse auf einen Tisch wirft. Obgleich nun Geräusche manchmal nicht ganz unmusikalisch und Klänge gewöhnlich nicht ganz frei von Geräuschen sind, so macht es indessen doch keine Schwierigkeit, zu erkennen, welches von den beiden die einfachere Erscheinung ist. Bei den musikalischen Klängen beobachten wir eine gewisse Glätte und ununterbrochene Reihenfolge. Ferner erhalten wir durch Zusammenklingenlassen vieler verschiedener Klänge — wie z. B. durch gleichzeitiges Anschlagen einer Anzahl von auf einander folgenden Tasten eines Klaviers — eine Annäherung an ein Geräusch; während keine Combination von Geräuschen sich jemals in einen musikalischen Klang vermischen kann.

10. Wir werden daher dazu geführt, unsere Aufmerksamkeit zunächst auf musikalische Schallempfindungen zu richten. Diese ordnen sich naturgemäss in eine gewisse Reihenfolge nach ihrer Höhe — eine Eigenschaft, welche Jedermann bis zu einer gewissen Ausdehnung genau abschätzen kann. Geübte Ohren können eine ungeheure Anzahl von Abstufungen erkennen — wahrscheinlich mehr wie tausend innerhalb des Umfanges der menschlichen Stimme. Diese Abstufungen in der Höhe sind nicht, wie etwa die Grade einer Thermometerscala, ohne specielle gegenseitige Beziehung. Wenn man irgend einen bestimmten Klang als Ausgangspunkt nimmt, so können die Musiker gewisse andere aussondern, welche eine

bestimmte Beziehung zu dem ersten haben, und als seine Octave, Quinte etc. bekannt sind. Die entsprechenden Unterschiede in der Höhe werden Intervalle genannt; man nennt diese Intervalle bei ein und derselben Verwandtschaft der einzelnen Klänge gleiche Intervalle. Wo man sich also in der musikalischen Scala auch befinden mag, überall ist ein Klang von seiner Octave getrennt durch das Intervall einer Octave. Es wird eine unserer späteren Aufgaben sein, den Ursprung und das Wesen der consonirenden Intervalle zu erklären, so weit dieses geschehen kann; wir müssen jetzt zu der physikalischen Seite der Frage zurückkehren.

Da der Schall durch Schwingungen erzeugt wird, so ist es natürlich anzunehmen, dass der einfachere Schall, d. i. musikalische Klänge, periodischen Schwingungen entspricht; d. h. Schwingungen, die sich selbst nach einer gewissen Zeitdauer, welche die Periode oder Schwingungsdauer genannt wird, mit vollkommener Regelmässigkeit wiederholen. Und diese Annahme ist mit einer gleich zu bezeichnenden Einschränkung richtig.

11. Um die Entstehung eines musikalischen Klanges zu veranschaulichen, können manche Vorrichtungen vorgeschlagen werden. Eine der einfachsten ist ein sich drehendes Zahnrad, dessen Zähne gegen ein Kartenblatt gedrückt werden. Jeder Anschlag beim Streifen der Karte giebt einen kleinen Schlag, dessen regelmässige Wiederkehr bei der Umdrehung des Rades einen Klang von bestimmter Höhe erzeugt, der in der musikalischen Scala höher wird, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit wächst. Das geeignetste Instrument für die fundamentalen Untersuchungen über Klänge ist unzweifelhaft die von Cagniard de la Tour erfundene Sirene. Dieselbe besteht wesentlich aus einer festen Scheibe, welche um ihren Mittelpunkt sich drehen kann und von einer oder mehreren Reihen von Löchern durchbohrt ist, die in gleichen Zwischenräumen auf mit der Scheibe concentrischen Kreisen angeordnet sind. Eine mit einem Blasebalge verbundene Röhre wird der Scheibe senkrecht gegenübergestellt; das offene

Ende der Röhre steht gerade einem der Kreise gegenüber, auf welchem eine Reihe von Löchern sich befindet. Wird der Blasebalg in Thätigkeit gesetzt, so entweicht der Luftstrom ungehindert, wenn ein Loch sich dem Ende der Röhre gegenüber befindet; im andern Falle wird er aber aufgehalten. Sobald die Scheibe sich dreht, entweicht durch sie eine Folge von Luftstössen, bis dieselben, wenn die Geschwindigkeit genügend gross ist, in einen Klang zusammenfliessen, dessen Höhe continuirlich mit der Geschwindigkeit der Aufeinanderfolge der Stösse steigt. Wir werden später Gelegenheit haben, vervollkommtere Formen der Sirene zu beschreiben, für unsern augenblicklichen Zweck genügt die beschriebene einfache Anordnung.

12. Eine der wichtigsten Thatsachen in der ganzen Wissenschaft wird durch die Sirene bewiesen — das ist die Thatsache, dass die Höhe eines Klanges von der Periode der zugehörigen Schwingung abhängt. Die Grösse und Gestalt der Löcher, die Stärke des Windes und andere Theile des Versuchs können geändert werden; wenn dabei nur die Anzahl der Stösse in einer gewissen Zeit, etwa in einer Secunde, ungeändert bleibt, so bleibt ebenso die Höhe ungeändert. Wir können selbst den Wind ganz entbehren und einen Klang hervorbringen, indem wir die Ecke einer Karte gegen die Kanten der Löcher schleifen lassen, wenn letztere sich herumdrehen; die Höhe des Klanges wird noch dieselbe sein. Beobachtungen mit anderen Quellen für Klänge, wie schwingende feste Körper, führen zu denselben Folgerungen, obgleich die Schwierigkeiten hierbei oft der Art sind, dass sehr verfeinerte Versuchsmethoden nöthig werden.

Wenn wir sagen: die Höhe hängt von der Periode ab, so lauert hier indess eine Unbestimmtheit, welche aufmerksame Ueberlegung fordert, da sie uns zu einem Punkte von grosser Wichtigkeit führt. Wenn eine veränderliche Grösse in irgend einer Zeit τ periodisch ist, so ist sie auch periodisch in den Zeiten 2τ, 3τ etc. Umgekehrt schliesst eine Wiederholung in einer bestimmten Periode τ nicht eine raschere Wiederholung inner-

halb Perioden aus, welche aliquote Theile von τ sind. Es folgt demnach hieraus augenscheinlich, dass eine Schwingung, welche sich in der Zeit $1/2\ \tau$ z. B. wirklich wiederholt, auch angesehen werden kann, als hätte sie die Periode τ; sie würde desshalb nach dem vorher festgestellten Gesetze einen Klang von der durch τ bestimmten Höhe geben. Man kann der zwingenden Gewalt dieser Ueberlegung nicht ganz dadurch entgehen, dass man als Periode die kleinste Zeit definirt, welche erforderlich ist, um eine Wiederholung zu bringen. Zunächst ist die Nothwendigkeit einer solchen Einschränkung in sich selbst schon hinreichend zu dem Nachweise, dass wir noch nicht auf die Wurzel unseres Gegenstandes gestossen sind; denn wenn auch einer Schwingung, welche sich streng innerhalb einer Zeit $1/2\ \tau$ wiederholt, das Anrecht auf eine Periode von τ versagt werden kann, so muss diese Periode doch einer Schwingung zugestanden werden, welche unendlich wenig von jener abweicht. Es möge bei dem Versuche mit der Sirene in einem der eine gerade Anzahl von Löcher enthaltenen Kreise jedes zweite Loch längs des Kreisbogens um denselben Betrag verschoben werden. Die Verrückung kann so klein gemacht werden, dass man in dem resultirenden Klange keine Aenderung zu entdecken vermag. Die Periode, von welcher die Höhe abhängt, ist aber verdoppelt. Zweitens ergiebt es sich deutlich aus dem Wesen der Periodicität, dass die Uebereinanderlagerung einer Schwingung mit der Periode τ über andere, welche die Periode $1/2\ \tau$, $1/3\ \tau$ etc. haben, die Periode τ nicht zerstört, während man nicht annehmen kann, dass die Hinzufügung von neuen Elementen die Eigenschaft des Klanges ungeändert lässt. Wie können wir überdies, da die Höhe durch die Gegenwart der anderen Schwingungen nicht beeinflusst wird, wissen, dass nicht Elemente von kürzerer Schwingungsdauer schon von Anfang an vorhanden waren?

13. Diese Ueberlegungen führen uns dazu, bemerkenswerthe Beziehungen zwischen den Klängen zu erwarten, deren Perioden sich umgekehrt wie die natürlichen Zahlen verhalten. Nichts ist leichter wie die Untersuchung dieser Frage mit

Hülfe der Sirene. Es seien auf der letzteren zwei Kreise von Löchern, von welchen der innere eine beliebige Anzahl von Löchern enthält, der äussere zwei Mal so viel. Mit welcher Geschwindigkeit die Scheibe dann auch herumgedreht werden mag, es wird die Schwingungsperiode, welche man beim Blasen durch die erstere Löcherreihe erhält, nothwendiger Weise das Doppelte der zu der zweiten Reihe gehörigen sein. Macht man nun diesen Versuch, so findet man, dass die beiden Klänge zu einander in der Beziehung einer Octave stehen; wir schliessen hieraus, dass beim Uebergang von irgend einem Klange zu dessen Octave die Anzahl der Schwingungen verdoppelt wird. Eine ähnliche Versuchsmethode zeigt, dass zu dem Periodenverhältniss von 3 : 1 das den Musikern als Duodecime bekannte Intervall gehört, welches von einer Octave und einer Quinte gebildet wird; ebenso zu dem Verhältnisse von 4 : 1 die doppelte Octave; und zu dem Verhältnisse von 5 : 1 das Intervall, welches von einer doppelten Octave und einer grossen Terz gebildet wird. Um das Intervall der Quinte und der Terz selbst zu erhalten, müssen die Periodenverhältnisse resp. wie 3 : 2 oder 5 : 4 sein.

14. Aus diesen Versuchen geht hervor, dass die Perioden zweier Klänge (oder Töne), wenn letztere eine bestimmte Beziehung zu einander haben, stets in einem bestimmten constanten Verhältniss stehen, welches der Beziehung der Klänge (Töne) zu einander charakteristisch ist. Es ist hierbei gleichgültig, in welchem Theile der Scala die Klänge (Töne) gelegen sind. Dasselbe kann von der Schwingungszahl derselben gesagt werden, oder der Anzahl von Schwingungen, welche jene in einer gegebenen Zeit ausführen. Das Verhältniss 2 : 1 ist daher charakteristisch für das Intervall einer Octave. Wollen wir zwei Intervalle verbinden — indem wir z. B. von einem gegebenen Klange (Tone) ausgehend erst einen Schritt um eine Octave und dann einen zweiten in derselben Richtung um eine Quinte weiter gehen — so müssen die entsprechenden Verhältnisse vereinigt werden:

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{1}.$$

Der zwölfte Theil einer Octave wird dargestellt durch das Verhältniss $\sqrt[12]{2} : 1$, denn das ist der Schritt, welcher zwölf Mal wiederholt zu einer Octave über den Ausgangspunkt führt. Wollen wir im eigentlichen Sinne ein Maass für die Intervalle haben, so müssen wir nicht das charakteristische Verhältniss selbst, sondern den Logarithmus dieses Verhältnisses nehmen. Dann, und dann allein, wird das Maass eines zusammengesetzten Intervalls die Summe der Maasse für die Componenten des Intervalls sein.

15. Von den Intervallen der Octave, Quinte und Terz, welche wir oben betrachteten, können andere den Musikern bekannte abgeleitet werden. Der Unterschied einer Octave und einer Quinte wird eine Quart genannt und hat das Verhältniss $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$. Diesen Process der Subtraction eines Intervalles von der Octave nennt man die Umkehrung. Durch Umkehrung der grossen Terz erhalten wir die kleine Sext. Andererseits erhalten wir durch Subtraction der grossen Terz von einer Quinte die kleine Terz, und von dieser durch Umkehrung die grosse Sext. Die folgende Tabelle giebt in den einzelnen Zeilen die Namen der Intervalle und der entsprechenden Verhältnisse der Schwingungszahlen:

Octave	2 : 1
Quinte	3 : 2
Quarte	4 : 3
Grosse Terz	5 : 4
Kleine Sext	8 : 5
Kleine Terz	6 : 5
Grosse Sext	5 : 3

Dieses sind alle in dem Bereiche der Octave enthaltenen consonirenden Intervalle. Es ist darauf aufmerksam zu machen, dass die entsprechenden Verhältnisse sämmtlich mit Hülfe von

kleinen ganzen Zahlen ausgedrückt sind, und dass dies um so mehr der Fall, je consonirender das Intervall ist.

Die Klänge (Töne), deren Schwingungszahlen Vielfache von der eines gegebenen Klanges (Tones) sind, werden harmonische Obertöne des letzteren genannt; die ganze Reihe derselben setzt eine harmonische Scala zusammen. Dieselben können, wie es Violinspielern sehr gut bekannt ist, alle durch die nämliche Saite erhalten werden, indem man letztere mit dem Finger an gewissen Stellen leicht berührt, während der Bogen über sie streicht.

Die Aufstellung des Zusammenhanges zwischen musikalischen Intervallen und bestimmten Verhältnissen der Schwingungszahlen — ein Fundamentalpunkt in der Akustik — verdankt man Mersenne (1636). Es war allerdings schon den Griechen bekannt, in welchen Verhältnissen die Längen der Saiten geändert werden müssen, um die Octave und die Quinte zu erhalten; Mersenne bewies aber das Gesetz, welches die Länge einer Saite mit der Periode ihrer Schwingungen verbindet, und machte die erste Bestimmung von der wirklichen Schwingungsanzahl eines bekannten musikalischen Klanges (Tones).

16. Auf jeden Klang (Ton), der als Grundton [1]) oder Tonica genommen wird, kann eine diatonische Scala gegründet werden, zu deren Ableitung wir jetzt übergehen wollen. Wird die Tonica, was auch ihre absolute Höhe sein mag, *Do* genannt, so heisst die Quinte über ihr oder die Dominante — *Sol*, die Quinte unter ihr oder die Subdominante — *Fa*. Der gewöhnliche Accord irgend eines Tones wird hergestellt durch Verbindung letzteres mit seiner grossen Terz und seiner Quinte, deren Schwingungszahlen also im folgenden Verhältniss stehen: $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$ oder $4 : 5 : 6$. Nehmen wir jetzt den gewöhnlichen

[1]) In den folgenden Paragraphen, soweit dieselben sich mit den musikalischen Scalen beschäftigen, wird dem gewöhnlichen Sprachgebrauche zu Liebe für das englische *note* — eigentlich mit Klang zu übersetzen — das Wort „Ton“ gebraucht, dessen specifische Bedeutung sich aber alsbald ergeben wird. Anm. d. Uebers.

Accord resp. auf der Tonica, auf der Dominante und auf der Unterdominante und transponiren, wenn nöthig, diese Accorde in die Octave, welche sich unmittelbar über der Tonica erhebt, so erhalten wir Töne, deren Schwingungszahlenverhältnisse nach ihrer Grösse geordnet folgende sind:

Do	*Re*	*Mi*	*Fa*	*Sol*	*La*	*Si*	*Do*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Der gewöhnliche Accord auf *Do* ist *Do*–*Mi*–*Sol*, mit den Verhältnissen $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$; der Accord auf *Sol* ist *Sol*–*Si*–*Re* mit den Verhältnissen $\frac{3}{2} : \frac{15}{8} : 2 \times \frac{9}{8} = 1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$; und der Accord auf *Fa* ist *Fa*–*La*–*Do* ebenfalls mit denselben Verhältnissen. Die Scala wird durch Wiederholung dieser Töne nach unten und oben in Octavenintervallen vervollständigt.

Nehmen wir als unser *Do* oder als Tonica das untere *c* einer Tenorstimme, so wird die diatonische Scala folgende sein:

c d e f g a h c'.

Es giebt kleine Unterschiede in dem Gebrauche, die verschiedenen Octaven von einander zu unterscheiden; in dem Folgenden werde ich die Bezeichnungsweise von Helmholtz anwenden. Die Octave unterhalb der eben erwähnten wird mit grossen Buchstaben geschrieben – *C*, *D* etc.; die nächste unter dieser mit einem Index – $C_{,}$, $D_{,}$ etc.; die folgende unter der letztern mit einem doppelten Index – $C_{,,}$ etc. Auf der andern Seite bezeichnen Accente die Erhöhung um eine Octave – *c'*, *c''* etc. Die Grundtöne der vier Saiten einer Violine werden bei dieser Bezeichnungsweise geschrieben: *g* – *d'* – *a'* – *e''*. Das mittlere *c* eines Klaviers ist *c'*.

17. In Bezug auf ein absolutes Normalmaass für die Höhe giebt es in der Praxis keine Gleichförmigkeit. Auf der Stuttgarter Conferenz im Jahre 1834 wurde *c'* = 264 ganzen Schwingungen in der Secunde empfohlen. Das entspricht einem *a'* = 440. Die französische Bestimmung macht *a'* = 435 Schwingungen. Zu Händel's Zeiten war die Höhe der ein-

zelnen Tonstufen viel tiefer. Wenn *c'* zu 256 oder 2^8 Schwingungen genommen würde, so würden alle *c*'s Schwingungszahlen besitzen, welche durch Potenzen von 2 dargestellt werden. Diese Höhe wird gewöhnlich von Physikern und den Verfertigern von akustischen Instrumenten angenommen; sie hat den Vortheil der Einfachheit.[1]

Die erste Bestimmung der Schwingungszahl eines gegebenen Tones ist eine Aufgabe, welche einige Sorgfalt erfordert. Die einfachste Methode ist im Principe die mittelst der Sirene, welche mit solcher Geschwindigkeit getrieben wird, dass sie einen Ton giebt, welcher im Einklange ist mit dem gegebenen Tone. Die Anzahl der Umdrehungen der Scheibe in einer Secunde wird durch einen Zählapparat gegeben, welcher bei Beginn und am Ende eines gemessenen Zeitraumes ein- und ausgesetzt werden kann. Diese Umdrehungsanzahl multiplicirt mit der Anzahl der wirkenden Löcher giebt die gesuchte Schwingungszahl. Die Besprechung anderer Methoden, welche eine grössere Genauigkeit zulassen, muss noch verschoben werden.

18. So lange wir uns an die diatonische Scala auf *c* halten, haben wir in den oben angeschriebenen Tönen alle diejenigen, welche in einer musikalischen Composition gebraucht werden. Es ist indess häufig erforderlich, die Tonica zu ändern. Unter solchen Umständen wählt ein Sänger mit gutem natürlichem Gehör, welcher gewohnt ist, ohne Begleitung zu singen, einen ganz neuen Ausgangspunkt, indem er sich eine neue diatonische Scala auf der neuen Tonica bildet. Auf diese Weise wird nach wenigen Wechseln des Schlüssels die ursprüngliche Scala ganz verlassen sein und eine ungeheure Anzahl von verschiedenen Tönen gebraucht werden. Auf einem Instrumente mit festen Tonstufen, wie beim Klavier und der Orgel, ist solch eine Vervielfältigung unausführbar; es ist dann einigermaassen ein Compromiss nothwendig, um demselben Tone zu gestatten, verschiedene Functionen ausüben zu können. Hier ist nicht der Ort, diese Frage in einiger Breite zu behandeln; wir wollen daher nur als ein Beispiel den einfachsten, eben so wie

den gewöhnlichsten Fall annehmen — die Modulation in die Scala, deren Tonica die Dominante ist.

Nach der Definition besteht die diatonische Scala des *c* aus den auf *c*, *g* und *f* aufgebauten gewöhnlichen Accorden. In gleicher Weise besteht die *g*-Scala aus den auf *g*, *d* und *c* aufgebauten Accorden. Die Accorde auf *c* und *g* haben daher beide Scalen gemeinschaftlich; die Terz und Quinte von *d* führen indess neue Töne ein. Die Terz von *d*, welche *fis* geschrieben wird, hat eine Schwingungszahl von $\frac{9}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{45}{32}$ und liegt weit ab von irgend einem der Töne in der *c*-Scala. Die Quinte von *d*, mit einer Schwingungszahl von $\frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$, unterscheidet sich dagegen nur wenig von *a*, dessen Schwingungszahl $\frac{5}{3}$ ist. Bei gewöhnlich gestimmten Instrumenten wird der Unterschied zwischen den beiden, welcher durch $\frac{81}{80}$ dargestellt und ein Comma genannt wird, vernachlässigt und die beiden Töne werden nach einem zweckmässigen Compromiss, Temperatur genannt, als identisch genommen.

19. Verschiedene Temperatursysteme sind in Gebrauch gewesen; das einfachste und jetzt meist allgemein gebrauchte oder wenigstens beliebteste ist das der gleich schwebenden Temperatur. Geht man die Tabelle der Schwingungszahlen für die diatonische Scala durch, so sieht man, dass die Intervalle von *Do* nach *Re*, von *Re* nach *Mi*, von *Fa* nach *Sol*, von *Sol* nach *La* und von *La* nach *Si* beinahe dieselben Grössen haben, da sie durch $\frac{9}{8}$ oder $\frac{10}{9}$ dargestellt werden. Dagegen sind die Intervalle von *Mi* nach *Fa* und von *Si* nach *Do*, welche durch $\frac{16}{15}$ dargestellt werden, ungefähr nur halb so gross. Die gleichschwebende Temperatur behandelt diese angenäherten Verhältnisse als genau übereinstimmend, indem sie die Octave in zwölf gleiche Theile eintheilt, welche mittlere halbe Töne

genannt werden. Aus diesen zwölf Tönen kann die zu irgend einer Tonica gehörige diatonische Scala nach der folgenden Regel aufgebaut werden. Indem man die Tonica als den ersten Ton nimmt, füllt man die Reihe aus durch den dritten, fünften, sechsten, achten, zehnten, zwölften und dreizehnten Ton und zwar aufwärts zählend. Auf diese Weise werden alle Schwierigkeiten in der Modulation vermieden, da die zwölf Töne eben so gut für die eine Tonica wie für die andere dienen. Dieser Vortheil ist indess auf Kosten einer richtigen Stimmung errungen. Die Terz des gleich schwebenden Systems, die der dritte Theil einer Octave ist, wird durch das Verhältniss $\sqrt[3]{2} : 1$ oder angenähert: 1,2599 dargestellt, während die reine Terz 1,25 ist. Die temperirte Terz ist daher um das Intervall 126 : 125 höher als die reine. Das Verhältniss der temperirten Quinte kann aus der Ueberlegung erhalten werden, dass sieben halbe Töne eine Quinte machen, während zwölf auf eine Octave gehen. Das Verhältniss ist daher $2^{7}/_{12} : 1$, was gleich 1,4983 ist. Die temperirte Quinte ist daher um das Verhältniss 1,4983 : 1,5 zu niedrig, oder angenähert um 881 : 882. Dieser Fehler ist ohne Belang; selbst der Fehler bei der Terz hat keine grosse Folgen bei bewegter, rascher Musik auf Instrumenten wie das Klavier. Wenn indess die Töne ausgehalten werden, wie beim Harmonium oder der Orgel, dann ist die Consonanz der Accorde wesentlich verschlechtert.

20. Die folgende Tabelle, welche die zwölf Töne der chromatischen Scala nach dem System der gleich schwebenden Temperatur enthält, ist eine bequeme Unterlage für weitere Berechnungen [1]). Der gebrauchte Ausgangsnormalton ist $a' = 440$; um die Tabelle auf irgend eine andere absolute Tonhöhe anzuwenden, ist es nur nöthig, sie durchweg mit dem betreffenden Eigen-Factor zu multipliciren:

---

1) Zamminer, die Musik und die musikalischen Instrumente. Giessen 1855.

	$C_{,,}$	$C_{,}$	C	c	c'	c''	c'''	c''''
C	16,35	32,70	65,41	130,8	261,7	523,3	1046,5	2093,2
Cis	17,32	34,65	69,30	138,6	277,2	544,4	1108,8	2217,7
D	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	587,4	1174,8	2349,6
Dis	19,44	38,89	77,79	155,6	311,2	622,3	1244,6	2489,3
E	20,60	41,20	82,41	164,8	329,7	659,3	1318,6	2637,3
F	21,82	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5	1397,0	2794,0
Fis	23,12	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0	1480,0	2960,1
G	24,50	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0	1568,0	3136,0
Gis	25,95	51,91	103,8	207,6	415,3	830,6	1661,2	3322,5
A	27,50	55,00	110,0	220,0	440,0	880,0	1760,0	3520,0
Ais	29,13	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1864,6	3729,2
H	30,86	61,73	123,5	246,9	493,9	987,7	1975,5	3951,0

Die Verhältnisse der Intervalle in der Scala der gleichschwebenden Temperatur sind folgende (Zamminer):

Ton	Schwingungszahl	Ton	Schwingungszahl
c	$= 1{,}00000$	*fis*	$2^{\frac{6}{12}} = 1{,}41421$
cis	$2^{\frac{1}{12}} = 1{,}05946$	*g*	$2^{\frac{7}{12}} = 1{,}49831$
d	$2^{\frac{2}{12}} = 1{,}12246$	*gis*	$2^{\frac{8}{12}} = 1{,}58740$
dis	$2^{\frac{3}{12}} = 1{,}18921$	*a*	$2^{\frac{9}{12}} = 1{,}68179$
e	$2^{\frac{4}{12}} = 1{,}25992$	*ais*	$2^{\frac{10}{12}} = 1{,}78180$
f	$2^{\frac{5}{12}} = 1{,}33484$	*h*	$2^{\frac{11}{12}} = 1{,}88775$

$c' = 2{,}000$

21. Kehren wir nun einen Augenblick zu der physikalischen Seite der behandelten Frage zurück. Wir wollen die Annahme machen — deren Richtigkeit innerhalb weiter Grenzen wir später nachweisen werden —, dass, wenn zwei oder mehrere Tonquellen die Luft gleichzeitig bewegen, die daraus sich ergebende Störung in irgend einem Punkte der äussern Luft oder des Gehörganges die einfache Summe (im ausgedehnten geometrischen Sinne) von dem ist, was durch jede Quelle bei ihrer alleinigen Wirkung erfolgen würde. Es soll nun

die Störung betrachtet werden, welche durch das gleichzeitige Erklingen eines Tones und irgend eines oder aller Obertöne desselben hervorgerufen wird. Nach der Definition bildet der ganze Complex einen Klang, welcher dieselbe Periode (und deshalb auch dieselbe Höhe) wie das tiefste der zusammensetzenden Elemente hat. Wir haben augenblicklich noch kein Kriterium, durch welches die zwei Töne unterschieden werden oder die Gegenwart der höheren harmonischen Obertöne erkannt werden kann. Und doch ist es — jedenfalls wenn die zusammensetzenden Klänge von einander unabhängige Ursprünge haben — gewöhnlich nicht schwer, diese höheren Töne durch das Ohr zu entdecken, so dass dieses eine Analyse der Mischung anstellt. Das heisst so viel, als dass eine genau periodische Schwingung ein Gefühl erregen kann, welches nicht einfach, sondern einer weitern Analyse fähig ist. Und in der That ist es den Musikern lange bekannt, dass unter gewissen Umständen die harmonischen Obertöne eines Klanges neben dem letztern gehört werden können, selbst wenn der Klang aus einer einzigen Quelle stammt, wie etwa von einer schwingenden Saite; die Bedeutung dieser Thatsache wurde aber nicht verstanden. Nachdem die Aufmerksamkeit auf diesen Punkt gelenkt war, wurde (namentlich durch die Arbeiten von Ohm und Helmholtz) bewiesen, dass fast alle musikalischen Klänge sehr zusammengesetzt sind, indem sie thatsächlich aus den Tönen einer harmonischen Scala bestehen, von denen in den einzelnen Fällen eines oder mehrere Glieder fehlen können. Der Grund der Unbestimmtheit und Unsicherheit der Analyse wird gleich berührt werden.

22. Der Theil eines Klanges, welchen das Ohr nicht weiter auflösen kann, wird von Helmholtz ein Ton genannt. Klänge werden im Allgemeinen von Tönen gebildet; die Höhe eines Klanges ist die des tiefsten Tones, welchen er enthält.

23. Genau gesprochen muss die Eigenschaft der Höhe zu allererst nur den einfachen Tönen zuertheilt werden; sonst entsteht die früher erwähnte Schwierigkeit der Discontinuität. Die

geringste Aenderung in der Natur eines Klanges kann die Höhe desselben um eine ganze Octave erniedrigen, wie sich das bei der Sirene ja auch herausstellte. Wir würden jetzt lieber sagen, dass bei dem betreffenden Versuch die Wirkung einer kleinen Umstellung der alternirenden Löcher die war, dass ein neuer schwacher Ton eingeführt wurde, der um eine Octave tiefer ist, wie der vorher vorhandene. Das genügt, um die Periode des Ganzen zu ändern, die grosse Masse des Klanges bleibt indessen nahezu dieselbe wie vorher.

Bei den meisten musikalischen Klängen ist indessen der fundamentale oder tiefste Ton in genügender Stärke vorhanden, um dem Ganzen seinen Charakter aufzudrücken. Die Wirkung der harmonischen Obertöne ist dann: die Qualität oder Klangfarbe des Klanges zu ändern in einer von der Höhe unabhängigen Weise. Dass ein solcher Unterschied existirt, ist wohl bekannt. Es können die Klänge einer Violine, einer Stimmgabel oder der menschlichen Stimme mit ihren verschiedenen Vocallauten etc. alle dieselbe Höhe haben und doch von einander verschieden sein, und zwar unabhängig von ihrer Stärke; obgleich ein Theil dieser Verschiedenheit auf begleitenden Geräuschen beruht, welche zu der Klangnatur jener nicht gehören, so ist doch ein Theil vorhanden, welcher nicht hierzu zu rechnen ist. Musikalische Klänge können daher als in dreierlei Hinsicht variabel geordnet werden. Zunächst: nach ihrer Höhe. Wir haben diesen Punkt schon genügend betrachtet. Zweitens: nach ihrer Klangfarbe, welche von den Verhältnissen abhängt, in denen die harmonischen Obertöne mit dem Fundamentalton verbunden sind. Drittens: nach ihrer Stärke. Diese muss zuletzt genommen werden, weil das Ohr nicht im Stande ist (mit einiger Genauigkeit), die Stärke von zwei Klängen zu vergleichen, welche sich sehr in ihrer Höhe und ihrer Klangfarbe unterscheiden. Wir werden indessen in einem der folgenden Capitel ein mechanisches Maass für die Stärke des Schalles geben, welches alle Abstufungen der Höhe in ein System einschliesst, doch für den Augenblick ist das nichts für uns. Wir beschäftigen uns mit der Stärke der Empfindung des Schalles, nicht mit einem Maass

für die physikalische Ursache desselben. Den Unterschied in der Stärke erkennen wir aber sofort in seinen verschiedenen Grössen, so dass wir kaum eine andere Wahl haben, als sie *caeteris paribus* als abhängig von der Grösse der betreffenden Schwingungen zu betrachten.

24. Wir haben gesehen, dass ein musikalischer Klang, als solcher, einer Schwingung, welche nothwendiger Weise periodisch ist, verdankt wird; das Entgegengesetzte kann indess offenbar nicht ohne Begrenzung richtig sein. Eine periodische Wiederholung eines Geräusches in Zeiträumen von einer Secunde — z. B. das Ticken einer Uhr — wird keinen musikalischen Klang geben, wenn die Wiederholung stets auch noch so vollkommen geschieht. In solch einem Falle können wir sagen, dass der fundamentale Ton ausserhalb der Gehörgrenze liegt; obgleich noch einige der harmonischen Obertöne in diese Grenzen hineinfallen, so werden diese doch keinen musikalischen Klang oder einen Accord erregen, sondern eine geräuschartige Masse von Schallen, ähnlich der, welche erzeugt wird durch gleichzeitiges Anschlagen der zwölf Töne der chromatischen Scala. Man kann diesen Versuch mit der Sirene anstellen, indem man die Löcher ganz unregelmässig rund auf dem Umfang eines Kreises vertheilt und dann die Scheibe mit einer mässigen Geschwindigkeit herumdreht. Nach der Construction des Instrumentes wiederholt sich Alles nach jeder vollständigen Umdrehung.

25. Die hauptsächlichste Schwierigkeit, welche in der Theorie von Klängen und Tönen zurückbleibt, ist die Erklärung dafür: warum Klänge manchmal vom Ohre in Töne zerlegt werden und manchmal nicht. Wenn ein Klang wirklich zusammengesetzt ist, warum wird diese Thatsache nicht sofort und sicher bemerkt und die einzelnen Componenten von einander gesondert? Die Schwäche der harmonischen Obertöne ist nicht der Grund, denn dieselben sind, wie wir bei einem spätern Punkte unserer Untersuchung sehen werden, oft von einer überraschenden Stärke und spielen eine hervorragende Rolle in der Musik. Wenn andererseits ein Klang manchmal

als ein Ganzes empfunden wird, warum tritt dieses nicht immer ein? Diese Fragen sind sehr sorgfältig von Helmholtz[1]) mit einem ziemlich zufrieden stellenden Resultat behandelt worden. Die Art der Schwierigkeit ist nicht der Akustik eigenthümlich; wir finden sie in analoger Weise in der jener verwandten Wissenschaft der physiologischen Optik.

Die Kenntniss der äusseren Dinge, welche wir aus den Anzeichen unserer Sinne ableiten, ist in den meisten Fällen das Resultat einer Folgerung. Wenn ein Gegenstand vor uns steht, so werden verschiedene Nerven in der Retina erregt, und bestimmte Empfindungen werden erzeugt, welche wir gewohnt sind, mit dem Gegenstande zu verbinden; wir folgern dann sogleich auch seine Gegenwart. Bei einem unbekannten Gegenstande ist der Process fast derselbe. Wir legen die Empfindungen, denen wir unterliegen, so aus, dass wir eine recht gute Vorstellung von der dieselben erregenden Ursache erhalten. Von den sich ein wenig von einander unterscheidenden perspectivischen Bildern der beiden Augen folgern wir, oft durch einen sehr mühsamen Process, die wirkliche Räumlichkeit und die Entfernung des Gegenstandes, wofür wir sonst keine Anleitung haben würden. Diese Folgerungen werden mit ausserordentlicher Schnelligkeit und ganz unbewusst gemacht. Das ganze Leben eines Jeden von uns ist eine fortwährende Lehre in der Auslegung der uns sich darbietenden Anzeichen und in den Folgerungen von Schlüssen daraus auf das thatsächlich Vorhandene ausser uns. Nur in so weit, als wir bei diesem Glück haben, sind unsere Empfindungen für uns in den gewöhnlichen Dingen des Lebens von einigem Nutzen. Unter solchen Umständen ist es kein Wunder, dass die Untersuchung unserer Empfindungen selbst in den Hintergrund tritt und dass subjective Erscheinungen, wie man dieselben nennt, ausserordentlich schwierige Beobachtungsobjecte sind. Als ein Beispiel hiervon genügt es, den „blinden Fleck“ in der Retina zu erwähnen, von dem man *a priori* hätte erwarten können, dass er sich selbst als eine ausgezeichnete Er-

[1]) Tonempfindungen, 3. Ausgabe, S. 98.

scheinung offenbart hätte, während doch thatsächlich wahrscheinlich nicht eine Person unter hundert Millionen denselben von selbst auffinden würde. Die Anwendung dieser Bemerkungen auf die vorliegende Frage ist hinreichend klar. Bei der täglichen Verwendung unsers Ohres ist es unser Zweck, aus der ganzen Menge von Schallen, welche unser Ohr erreichen, diejenigen Theile auszusondern, die aus Quellen stammen, welche uns in dem Augenblicke gerade interessiren. Wenn wir auf die Unterhaltung eines Freundes hören, so fixiren wir unsere Aufmerksamkeit auf den Schall, der von ihm kommt, und bestreben uns, diesen als ein Ganzes aufzufassen, während wir auf andere Schallerregungen so viel wie möglich gar nicht achten und dieselben nur als eine Unterbrechung ansehen. Es sind gewöhnlich hinreichende Merkmale vorhanden, um uns bei dem Anstellen dieser theilweisen Analyse zu unterstützen. Spricht ein Mensch, so steigt und fällt der ganze von seiner Stimme herrührende Schall zusammen als ein Ganzes; wir finden daher keine Schwierigkeit darin, denselben als eine Einheit, als ein Zusammengehöriges zu erkennen. Es würde keinen Vortheil bringen, im Gegentheil eine grosse Quelle von Verwirrung sein, wenn wir die Analyse noch weiter treiben und die ganze vorhandene Schallmasse in die einzelnen sie zusammensetzenden Töne auflösen wollten. Wenn auch von der Seite der reinen Empfindung angesehen eine Auflösung in Tönen gewünscht werden kann, so bringen uns doch die Nothwendigkeiten unserer Lage und das praktische Leben dazu, die Analyse an dem Punkte einzustellen, über welchen hinaus dieselbe aufhören würde, uns zur Entzifferung unserer Empfindungen, solche als blosse Anzeichen äusserer Gegenstände betrachtet [1]), dienlich zu sein.

Manchmal kann es indessen sich ereignen, dass wir, wie sehr wir auch wünschen, ein Urtheil zu bilden, der wesent-

---

[1]) Höchst wahrscheinlich ist die Fähigkeit, auf den wichtigen Theil unserer Empfindungen zu achten und den unwichtigen derselben zu ignoriren, zum grossen Theile von uns ererbt — zu einer sehr grossen Ausdehnung in dieser Fähigkeit werden wir wohl nie kommen.

lichen Dinge, um dies thun zu können, vollständig entbehren. Wenn ein Klang und seine Octave nahe zusammen und mit einer vollkommenen Gleichförmigkeit ertönen, so ist in unseren Empfindungen nichts vorhanden, welches uns in den Stand setzen kann, zu unterscheiden, ob die Klänge einen doppelten oder einen einfachen Ursprung haben. Bei dem gemischten Register der Orgel lässt das Niederdrücken jeder Taste den Wind zu einer Gruppe von Pfeifen, welche eine bestimmte Tonstufe und die ersten drei oder vier harmonischen Obertöne derselben geben. Die Pfeifen jeder Gruppe erklingen stets zusammen und das Resultat hiervon wird gewöhnlich als ein einzelner Klang empfunden, obgleich dasselbe nicht aus einer einzigen Quelle hervorgeht.

26. Die Auflösung eines Klanges in seine zusammensetzenden Töne ist eine Aufgabe, die für verschiedene Menschen sehr verschiedene Schwierigkeiten darbietet. Namentlich beim ersten Versuch ist ein grosser Aufwand von Aufmerksamkeit erforderlich; so lange bis man sich noch nicht daran gewöhnt hat, ist eine äussere Hülfe, welche Einem einflüstert, worauf man horchen soll, sehr wünschenswerth.

Wir werden zu der Frage nach der Analyse der Klänge später zurückkehren, nachdem wir die Schwingungen von Saiten behandelt haben, mit deren Hülfe jene am besten klar gemacht werden kann. Es möge indess doch hier zunächst noch ein sehr lehrreicher Versuch folgen, der ursprünglich von Ohm gemacht und dann von Helmholtz vervollkommnet ist. Helmholtz[1]) nahm zwei Flaschen von der in Fig. 1 (a. f. S.) dargestellten Form, die eine etwa zwei Mal so gross wie die andere. Dieselben wurden durch einen Luftstrom längs des Flaschenmundes angeblasen; der Luftstrom kam aus Gummiröhren, deren der Flasche zugekehrten Enden erweicht und dann zusammengepresst waren, so dass die Oeffnung die Form eines engen Schlitzes annahm. Beide Röhren sind in Verbindung mit demselben Blasebalg. Indem man Wasser eingiesst,

---

[1]) Tonempfindungen S. 109.



nöffnung theilweise
nan aus den Flaschen
halten, welche genau
ntervall einer Octave
der abstehen, etwa
Die grössere Flasche
in angeblasen, einen
mpfen Klang, der
angfarbe nach dem
ähnlich ist; wenn in-
ide Flaschen zusam-
blasen werden, so ist
farbe des resultiren-
ges schärfer, sie ähnelt
Vocal *O*. Noch eine
eit, nachdem beide
getrennt gehört waren,
lmholtz im Stande,
in der Mischung zu
sich die Erinnerung
en der höhere Klang
nalgamiren, welcher
re Klangfarbe erhielt.
ann selbst dann ein-
lautere ist.

ben, dass Klänge ge-
r eine specielle Art
, einer weitern Ana-
ge geführt, was ist
nal der Töne, wel-
verdanken? Welche
t es, welche einen
her mathematischen
Druck in dem Gehör-
ne wichtigere Frage

Die einfachsten periodischen Functionen, welche die Mathematiker kennen, sind die Kreisfunctionen, die durch einen *sinus* oder einen *cosinus* ausgedrückt werden. Es giebt in der That unter allen anderen keine, welche derselben an Einfachheit gleichkommen. Sie können jede Periode besitzen; da sie keine andere Variation zulassen (mit Ausnahme ihrer Grösse), so scheinen sie wohl fähig zu sein, einen einfachen Ton wiederzugeben. Ausserdem hat Fourier bewiesen, dass die allgemeinste eindeutige Function in eine Reihe von Kreisfunctionen zerlegt werden kann, welche Perioden haben, die Submultiplen von der der gegebenen Function sind. Andererseits ist es eine Folgerung der allgemeinen Schwingungstheorie, dass diejenige besondere Schwingungsart, der wir jetzt einen einfachen Ton unterlegen, die einzige ist, welche ihre Unveränderlichkeit bewahrt unter all den verschiedenen Umständen, denen sie unterworfen sein kann. Alle anderen Arten sind einer gewissen physikalischen Analyse zugänglich, indem die Theile verschieden von einander afficirt werden. Wenn die Analyse im Ohre nach einem andern Princip vor sich ging, wie die nach den Gesetzen der unbelebten Materie ausserhalb des Ohres angestellte, so würde die Folge die sein, dass ein ursprünglich einfacher Klang auf seinem Wege zum Beobachter zusammengesetzt werden könnte. Es ist kein Grund zu der Annahme vorhanden, dass irgend etwas dieser Art eintreten kann. Wenn man dazu bedenkt, dass nach all den Vorstellungen, welche wir uns machen können, die Analyse im Ohre mittelst einer physikalischen Maschinerie angestellt werden muss, welche denselben Gesetzen, die auswärts herrschen, unterliegt, so sieht man, dass ein stark zwingender Grund vorliegt, die Töne als hervorgebracht durch Schwingungen anzusehen, welche durch Kreisfunctionen ausgedrückt werden. Wir sind indessen nicht ganz allein auf die Führung von solchen allgemeinen Ueberlegungen angewiesen. In dem Capitel über die Schwingungen der Saiten werden wir sehen, dass in vielen Fällen uns die Theorie schon vorher über die Natur der von einer Saite ausgeführten Schwingungen belehrt, und in einigen darüber, ob irgend eine bestimmte einfache

Schwingung eine Componente ist oder nicht. Hier haben wir dann ein entscheidendes Zeugniss. Es ist durch den Versuch nachgewiesen, dass stets, wenn nach der Theorie irgend eine einfache Schwingung vorhanden ist, der dieser entsprechende Ton auch gehört werden kann, während dieser Ton nie gehört werden kann, wenn die einfache Schwingung nicht vorhanden ist. Wir sind daher zu der Behauptung berechtigt, dass ein-einfache Töne und durch Kreisfunctionen ausdrückbare Schwingungen unauflöslich mit einander verknüpft sind. Dieses Gesetz wurde von Ohm entdeckt.

Zweites Capitel.

Harmonische Bewegungen.

28. Die durch eine Kreisfunction der Zeit ausgedrückten Schwingungen, welche verschieden als einfache, Pendel- oder harmonische Schwingungen bezeichnet werden, sind in der Akustik von solcher Wichtigkeit, dass wir nichts Besseres thun können, als dass wir vor unserm Eintritt in den dynamischen Theil unseres Gegenstandes der Betrachtung derselben ein Capitel widmen. Die Grösse, deren Veränderung die Schwingung ausmacht, möge die in einer bestimmten Richtung gemessene Verschiebung eines Theilchen sein, oder der Druck an einem bestimmten Punkt eines Fluidums und so fort. In jedem Falle haben wir, wenn wir dieselbe mit u bezeichnen:

$$u = a \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) \qquad 1)$$

in welchem Ausdruck a die Amplitude oder den grössten Werth von u bezeichnet; τ die Schwingungsdauer oder Periode, nach Verlauf welcher der betreffende Werth von u wiederkehrt; ε bestimmt die Phase der Schwingung in dem Moment, von welchem an t gerechnet wird.

Irgend welche Anzahl von harmonischen Schwingungen mit derselben Periode, welche dieselbe veränderliche Grösse betreffen, setzen sich in eine andere Schwingung von derselben Art zusammen, deren Elemente auf folgende Weise bestimmt werden:

$$u = \sum a\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right)$$
$$= \cos\frac{2\pi t}{\tau}\sum a\cos\varepsilon + \sin\frac{2\pi t}{\tau}\sum a\sin\varepsilon$$
$$= r\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \Theta\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wenn

$$r = \left\{(\Sigma a\cos\varepsilon)^2 + (\Sigma a\sin\varepsilon)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und

$$\operatorname{tang}\Theta = \sum a\sin\varepsilon : \sum a\cos\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Es seien z. B. zwei Componenten vorhanden:

$$u = a\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) + a'\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon'\right);$$

dann ist

$$r = \left\{a^2 + a'^2 + 2aa'\cos(\varepsilon - \varepsilon')\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{a\sin\varepsilon + a'\sin\varepsilon'}{a\cos\varepsilon + a'\cos\varepsilon'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Es mögen einige besondere Fälle erwähnt werden.

Stimmen die Phasen der beiden Componenten überein, so ist

$$u = (a + a')\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right).$$

Unterscheiden sich die Phasen um eine halbe Periode, so ist:

$$u = (a - a')\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right),$$

so dass u verschwindet, wenn $a = a'$ ist. In diesem Falle sagt man oft: die Schwingungen interferiren, indess führt der Ausdruck leicht irre. Man kann von zwei Schwingungen sehr richtig sagen, dass dieselben interferiren, wenn sie zusammen Ruhe verursachen; indess kann die einfache Uebereinanderlagerung allein von zwei Schwingungen (ob diese nun Ruhe bewirken oder nicht) nicht eigentlich so genannt werden. Wenigstens ist es, wenn dieses Interferenz ist, schwer zu sagen, was Nichtinterferenz sein kann. Im Verlaufe der Untersuchung

wird es sich zeigen, dass sich Schwingungen, welche eine gewisse Intensität übersteigen, nicht mehr durch einfache Addition zusammensetzen; diese gegenseitige Einwirkung könnte viel eigentlicher Interferenz genannt werden; sie ist indess eine Erscheinung von einer vollständig andern Natur wie die, mit welcher wir jetzt zu thun haben.

Wenn weiter die Phasen sich um ein Viertel oder drei Viertel einer Periode von einander unterscheiden, dann ist $cos\,(\varepsilon - \varepsilon') = 0$ und

$$r = \left\{a^2 + a'^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

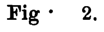
Harmonische Schwingungen von einer bestimmten Periode lassen sich durch Linien darstellen, die von einem Pole ausgezogen werden und deren Längen den Amplituden, deren Neigungen den Phasen der Schwingungen proportional sind. Die Resultante irgend einer Anzahl von harmonischen Schwingungen wird dann dargestellt durch die geometrische Resultante der entsprechenden Linien. Wenn letztere z. B. symmetrisch rund um den Pol angeordnet sind, so ist die Resultante der Linien oder auch der Schwingungen gleich Null.

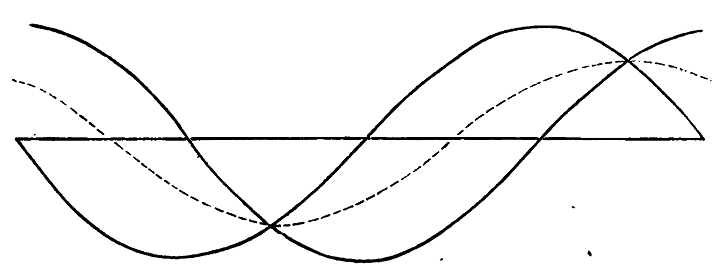
29. Messen wir längs einer x-Axe Entfernungen ab, die proportional der Zeit sind, und nehmen u als Ordinate, so erhalten wir die harmonische Curve oder Sinuscurve:

$$u = a\,cos\left(\frac{2\,\pi\,x}{\lambda} - \varepsilon\right);$$

hier ist λ, die Wellenlänge genannt, an Stelle von τ gesetzt. Beide Grössen geben den Betrag der unabhängigen Variabeln an, der einer vollkommenen Wiederholung der Function entspricht. Die harmonische Curve ist daher der Ort eines Punktes, der zu gleicher Zeit eine gleichförmige Bewegung und in einer dazu senkrechten Richtung eine harmonische Schwingung ausführt. In dem nächsten Capitel werden wir sehen, dass die Schwingung einer Stimmgabel einfach harmonisch ist; wenn daher eine angeschlagene Stimmgabel mit gleichförmiger Geschwindigkeit parallel der Richtung ihres Stieles fortbewegt wird, so beschreibt ein an das Ende einer ihrer Zinken ange-

brachter Schreibstift eine harmonische Curve, welche man in dauernder Gestalt erhalten kann, wenn man den Schreibstift ein Stück berusstes Papier berühren lässt. In Fig. 2 sind die ausgezogenen Linien zwei harmonische Curven von derselben


Fig. 2.



Wellenlänge und Amplitude, aber mit verschiedenen Phasen; die punktirte Curve stellt ihre halbe Resultante dar, sie ist der Ort der Punkte, welche das Mittel zwischen denen sind, in denen die ersten Curven von irgend einer Ordinate getroffen werden.

30. Wenn zwei harmonische Schwingungen von verschiedenen Schwingungsdauern zusammen existiren, so ist:

$$u = a \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) + a' \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau'} - \varepsilon'\right).$$

Die Resultante kann hier nicht durch eine einfache harmonische Bewegung mit anderen Elementen dargestellt werden. Sind τ und τ' incommensurabel, so kehren die Werthe von u nie zurück; stehen dagegen τ und τ' in dem Verhältnisse von zwei ganzen Zahlen, so kehrt u zurück nach Verlauf einer Zeit, die gleich dem ~~letzten~~ [Kleinsten] gemeinschaftlichen Vielfachen von τ und τ' ist; die Schwingung ist aber nicht einfach harmonisch. Wenn z. B. ein Ton und seine Quinte zusammen ertönen, so kehrt dieselbe Schwingung nach einer Zeit zurück, welche das Doppelte der Schwingungsdauer des tiefern Tones ist.

Ein Fall der Zusammensetzung von harmonischen Schwingungen mit verschiedenen Perioden ist noch besonderer Be-

Grundton : Quinte = 3 : 2
L.C.M. of 3 + 2 is 6 which is 2 × 3.

sprechung werth; das ist der Fall, wo der Unterschied der Perioden klein ist. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit nur auf den Verlauf der Dinge während eines Zeitraumes richten, der nur wenige Schwingungsdauern einschliesst, so sehen wir, dass diese beiden Schwingungen beinahe dieselben sind, als wenn ihre Perioden absolut gleich wären; in diesem Falle würden sie, wie wir gesehen haben, einer andern harmonischen Schwingung von derselben Schwingungsdauer äquivalent sein. Für die Zeit von wenigen Perioden ist daher die resultirende Bewegung annähernd einfach harmonisch; indessen wird dieselbe harmonische Bewegung jene nicht dauernd für eine lange Zeit darstellen. Die Schwingung, welche die kürzere Periode hat, eilt fortdauernd ihrer Begleiterin voraus, so dass dadurch der Unterschied der Phase, von welchem die Elemente der Resultante abhängen, geändert wird. Des einfacheren Ausdrucks halber wollen wir annehmen, dass die beiden Componenten gleiche Amplituden haben, und dass ihre Schwingungszahlen durch m und n dargestellt seien, wobei $m - n$ klein ist, und dass bei den ersten Beobachtungen ihre Phasen übereinstimmen. In dem ersten Momente vereinigen sich also ihre Wirkungen, die Resultante hat eine Amplitude doppelt so gross wie die jeder Componente. Nach einer Zeit $1 : 2(m - n)$ wird indessen die Schwingung cf. p. 33 m im Vergleich zu der andern eine halbe Periode gewonnen haben; die beiden, welche sich jetzt in vollständigem Gegensatze zu einander befinden, werden sich gegenseitig aufheben. Nach einem weitern Zeitraum von derselben Grösse wie der eben erwähnte hat m eine ganze Schwingung vollständig gewonnen und eine vollkommene Uebereinstimmung ist noch einmal wieder hergestellt. Die resultirende Bewegung ist daher annähernd einfach harmonisch mit einer nicht constanten Amplitude, die aber nur von Null bis zu dem Doppelten von der der Componenten variirt; die Schwingungszahl dieser Aenderungen ist $m - n$. Wenn zwei Stimmgabeln mit den Schwingungszahlen 500 und 501 gleichmässig angeschlagen werden, so wird in jeder Secunde ein Zunehmen und Schwächerwerden des Klanges eintreten, welches dem Zusammenfallen oder dem Gegensatze der Schwingungen jener entspricht.

Diese Erscheinung wird „Schwebungen“ genannt. Wir werden hier die Frage, wie das Ohr sich gleichzeitigen Schwingungen gegenüber verhält, die nahezu gleiche Schwingungszahlen haben, nicht vollständig besprechen; es ist indessen klar, dass, wenn die Bewegung in der Nachbarschaft des Ohres meist für einen beträchtlichen Theil einer Secunde aufhört, der Schall abzunehmen scheinen muss. Aus Gründen, die später klar werden, werden Schwebungen am Besten gehört, wenn die interferirenden Schalle einfache Töne sind. Aufeinanderfolgende Klänge bei geschlossenem Principal der Orgel zeigen die Erscheinung sehr gut, wenigstens in den unteren Theilen der Scala. Eine andauernde Interferenz zweier Klänge kann erhalten werden, wenn man zwei gedeckte Pfeifen von ähnlicher Construction und derselben Tonhöhe neben einander auf dieselbe Windlade setzt. Die Schwingungen der beiden Pfeifen adaptiren sich einander bis zu einem vollständigen Gegensatz, so dass man in einer kleinen Entfernung nichts mehr hören kann, ausser dem Einströmen des Windes. Kann durch eine feste Zwischenwand zwischen den beiden Pfeifen der eine Klang ganz abgeschnitten werden, so wird der andere sofort wieder hergestellt. Das Gleichgewicht, von welchem das Verschwinden des Schalles abhängt, kann auch dadurch gestört werden, dass man das Ohr an eine Röhre bringt, deren anderes Ende dicht an den Mund einer der Pfeifen anliegt.

Mittelst der Schwebungen können zwei Klänge mit grosser Genauigkeit *unisono* abgestimmt werden. Die Aufgabe ist, die Anzahl der Schwebungen so klein wie möglich zu machen, da die Anzahl der Schwebungen in einer Secunde gleich dem Unterschied der Schwingungszahlen der Klänge ist. Unter günstigen Umständen können so geringe Schwebungen wie eine in 30 Secunden erkannt werden, und diese würden also anzeigen, dass der höhere Klang in einer Minute nur zwei Schwingungen vor dem tiefern gewinnt. Andererseits kann etwa gewünscht werden, den Unterschied in den Schwingungszahlen zweier nahezu im Einklange stehenden Klänge zu wissen; dann ist nichts weiter nöthig, als die Anzahl der Schwebungen zu zählen. Man möge sich dabei aber erinnern, dass

der Unterschied in den Schwingungszahlen nicht das Intervall zwischen den beiden Klängen giebt; dieses hängt nur von dem Verhältniss der Schwingungszahlen ab. Deshalb wird die Anzahl der von zwei nahezu im Einklang stehenden Klängen erzeugten Schwebungen verdoppelt, wenn beide Klänge genau um eine Octave höher genommen werden.

Analytisch haben wir

$$u = a\cos(2\pi m t - \varepsilon) + a'\cos(2\pi n t - \varepsilon'),$$

wobei $m - n$ klein ist.

Es kann nun $\cos(2\pi n t - \varepsilon')$ geschrieben werden:

$$\cos\{2\pi m t - 2\pi(m - n)t - \varepsilon'\},$$

so dass wir haben:

$$u = r\cos(2\pi m t - \vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$

worin

$$r^2 = a^2 + a'^2 + 2aa'\cos\{2\pi(m - n)t + \varepsilon' - \varepsilon\} \quad . \quad 2),$$

und

$$tang\, \vartheta = \frac{a\sin\varepsilon + a'\sin\{2\pi(m - n)t + \varepsilon'\}}{a\cos\varepsilon + a'\cos\{2\pi(m - n)t + \varepsilon'\}} \quad . \quad 3).$$

Die resultirende Schwingung kann daher als eine harmonische angesehen werden mit den Elementen r und ϑ, die nicht constant, sondern ein wenig veränderliche Functionen von der Zeit mit der Schwingungszahl $(m - n)$ sind. Die Amplitude r hat ihr Maximum, wenn:

$$\cos\{2\pi(m - n)t + \varepsilon' - \varepsilon\} = + 1,$$

und ihr Minimum, wenn

$$\cos\{2\pi(m - n)t + \varepsilon' - \varepsilon\} = - 1;$$

die entsprechenden Werthe sind dann resp. $a + a'$ und $a - a'$.

31. Ein anderer Fall von grosser Wichtigkeit ist die Zusammensetzung von Schwingungen, die einem Tone und seinen harmonischen Obertönen entsprechen. Es ist bekannt, dass die allgemeinste einwerthige, endliche, periodische Function stets durch eine Reihe von einfachen harmonischen Functionen ausgedrückt werden kann:

$$u = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right) . \quad . \quad 1),$$

ein Satz, der gewöhnlich als der Fourier'sche bezeichnet wird. Analytische Beweise für denselben findet der Leser in Tod-

hunter's Integral Calculus, in Thomson's und Tait's Theoretischer Physik, übersetzt von Helmholtz und Werthheim (S. 57) etc. Eine Art von Beweis, der zum grössten Theil, wenn nicht ganz, auf eine Veranschaulichung hinausläuft, wird sich später auch in diesem Buche finden. Hier sind nur wenige Bemerkungen nöthig.

Fourier's Satz ist nicht von selbst evident. Nicht ungewöhnlich ist eine unbestimmte Fassung desselben, nämlich die, dass die unendliche Anzahl willkürlicher Constanten in der Fourier'schen Reihe letztere nothwendiger Weise befähigt, eine beliebige periodische Function darzustellen. Dass dies ein Irrthum ist, liegt wegen des Umstandes schon auf der Hand, dass dasselbe Argument angewendet werden könnte, wenn ein Glied der Reihe vernachlässigt wird; in diesem Falle würde aber die Entwickelung im Allgemeinen nicht möglich sein.

Ein anderer der Erwähnung werther Punkt ist der, dass einfache harmonische Functionen nicht die einzigen sind, nach denen man eine willkürlich gegebene Function in Reihen entwickeln kann. Anstatt des einfachen Gliedes:

$$\cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right)$$

können wir nehmen:

$$\cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right),$$

das dadurch gebildet wird, dass wir ein ähnliches Glied von derselben Phase und der halben Amplitude, sowie der halben Periode hinzu addiren. Es ist klar, dass diese Glieder dasselbe leisten würden wie die früheren; denn:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right) = &\left\{\cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4 n t}{\tau} - \varepsilon_n\right)\right\}\\ &- \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{4\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{8 n t}{\tau} - \varepsilon_n\right)\right\}\\ &+ \frac{1}{4}\left\{\cos\left(\frac{8\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{16\pi n t}{\tau} - \varepsilon_n\right)\right\}\\ &- \ldots \text{ ad infin.},\end{aligned}$$

so dass jedes Glied in der Fourier'schen Reihe und daher auch die Summe der Reihe ausgedrückt werden kann durch

die doppelten der gerade aufgestellten Elementarglieder. Es wird an dieser Stelle hierauf hingewiesen, weil Leser, welche mit anderen Entwickelungen nicht vertraut sind, sonst meinen könnten, dass die einfachen harmonischen Functionen ihrer Natur nach allein dazu befähigt sind, die Elemente in der Entwickelung einer periodischen Function abzugeben. Der Grund von der hervorragenden Wichtigkeit der Fourier'schen Reihe für die Akustik ist der in dem vorhergehenden Capitel erwähnte mechanische, welcher später noch vollständiger auseinandergesetzt werden soll, der nämlich: dass im Allgemeinen einfach harmonische Schwingungen die einzige Art von Schwingungen sind, welche durch ein schwingendes System fortgepflanzt werden, ohne eine Zerlegung zu erleiden.

32. Ebenso wie in anderen Fällen ähnlicher Art, z. B. bei der Taylor'schen Entwickelung, können, wenn die Möglichkeit der Entwickelung bekannt ist, auch hier die Coefficienten durch einen verhältnissmässig einfachen Process bestimmt werden. Wir können die Gleichung (1) aus §. 31 auch schreiben:

$$u = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos \frac{2n\pi t}{\tau} + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin \frac{2n\pi t}{\tau} \,. \quad (1).$$

Multipliciren wir mit $\cos \frac{2n\pi t}{\tau}$ oder $\sin \frac{2n\pi t}{\tau}$, und integriren über eine vollständige Periode von $t = 0$ bis $t = \tau$, so finden wir:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\tau}\int_0^\tau u \cos \frac{2n\pi t}{\tau}\, dt \\ B_n &= \frac{2}{\tau}\int_0^\tau u \sin \frac{2n\pi t}{\tau}\, dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Eine unmittelbare Integration giebt:

$$A_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

welches zeigt, dass A_0 der Mittelwerth von u während der Dauer der Periode ist.

Der Grad der Convergenz in der Entwickelung von u hängt im Allgemeinen ab von der Continuität der Function und ihrer Differentialquotienten. Die durch immer weitere Differentiationen von Gleichung (1) gebildeten Reihen convergiren immer weniger rasch, bleiben indess noch convergent und stellen arithmetisch die Differentialquotienten von u dar, so lange wie diese letzteren überall endlich sind. Wenn daher alle Differentialquotienten bis zum $m$ten inclusive keine unendlichen Werthe besitzen, dann ist die Reihenentwickelung für u convergenter wie eine Reihe mit den Coefficienten:

$$1, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{3^m}, \frac{1}{4^m} \ldots \ldots \ldots \text{ etc.}$$

(Thomson und Tait, §. 77.)

33. Eine andere zusammengesetzte Classe von Schwingungen, die Interesse haben wegen der Leichtigkeit, mit welcher sie sich auf optischem Wege beobachten lassen, erfolgen in dem Falle, dass zwei harmonische Schwingungen, welche dasselbe Theilchen ergreifen, in zwei senkrecht zu einander stehenden Richtungen ausgeführt werden, besonders wenn die Perioden nicht allein commensurabel, sondern in dem Verhältnisse von zwei kleinen ganzen Zahlen zu einander stehen. Die Bewegung ist dann vollkommen periodisch mit einer Periode, welche nicht viel grösser wie die der Componenten ist; die beschriebene Curve ist eine in sich zurückkehrende. Sind u und v die Coordinaten, so können wir setzen:

$$u = a \cos(2\pi n t - \varepsilon), \; v = b \cos 2\pi n' t \quad . \; . \; 1).$$

Zunächst wollen wir annehmen: die Perioden seien einander gleich, so dass $n' = n$. Die Elimination von t giebt für die Gleichung der beschriebenen Curve:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 2\frac{uv}{ab} \cos \varepsilon - \sin^2 \varepsilon = 0 \quad . \; . \; . \; . \; 2);$$

dieselbe stellt im Allgemeinen eine Ellipse dar, deren Lage und Dimensionen von den Amplituden der ursprünglichen Schwingungen und von dem Phasenunterschied der letzteren abhängen. Unterscheiden sich die Phasen um eine viertel Periode, so ist $\cos \varepsilon = 0$; die Gleichung wird dann:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

Es fallen dann die Axen der Ellipse mit den Coordinatenaxen zusammen. Wenn weiter die beiden Componenten noch gleiche Amplituden haben, dann geht die Curve in einen Kreis über:

$$u^2 + v^2 = a^2,$$

der mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben wird. Dieses Beispiel zeigt, wie eine gleichförmige Kreisbewegung in zwei geradlinige harmonische Bewegungen zerlegt werden kann, die auf einander senkrecht stehen.

Stimmen die Phasen der Bewegung überein, so ist $\varepsilon = 0$ und die Ellipse geht in die zusammenfallenden geraden Linien über:

$$\left(\frac{u}{a} - \frac{v}{b}\right)^2 = 0;$$

oder, wenn die Phasendifferenz gleich einer halben Periode ist, in:

$$\left(\frac{u}{a} + \frac{v}{b}\right)^2 = 0.$$

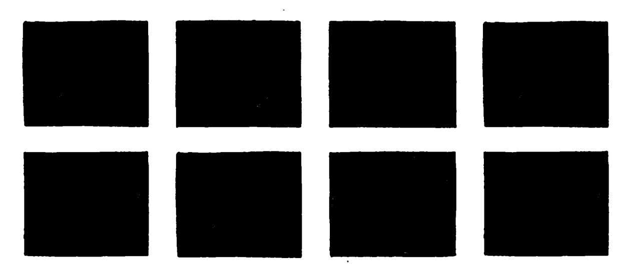
Wenn das *Unisono* von zwei Schwingungen ganz genau ist, so bleibt die elliptische Bahn vollkommen stetig; in der Praxis wird es aber stets eintreten, dass eine kleine Differenz zwischen den Perioden herrscht. Die Folge davon ist, dass, wenn auch eine bestimmte Ellipse die beschriebene Curve für wenige Perioden mit hinreichender Genauigkeit darstellt, diese Ellipse sich schrittweise ändert entsprechend der Grössenänderung von ε. Daher ist es von grossem Interesse, das System der durch 2) dargestellten Ellipsen zu betrachten, wenn a und b constant, ε dagegen veränderlich ist.

Da die äussersten Werthe von u und v resp. $\pm a$ und $\pm b$ sind, so bleibt die Ellipse unter allen Umständen dem Rechteck eingeschrieben, dessen Seiten sind $2a$ und $2b$. Gehen wir von dem Punkte aus, wo die Phasen übereinstimmen, oder $\varepsilon = 0$, so haben wir eine Ellipse, welche mit der Diagonale $\frac{u}{a} - \frac{v}{b} = 0$ zusammenfällt. Wächst ε von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, so öffnet sich die Ellipse, bis ihre Gleichung wird:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

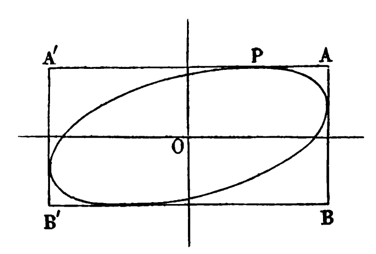
Von diesem Punkte an zieht sie sich wieder zusammen, bis sie schliesslich mit der andern Diagonale $\frac{u}{a} + \frac{v}{b} = 0$ zusammenfällt, welche dem Anwachsen von ε von $\frac{1}{2}\pi$ bis π entspricht. Hierauf, wenn ε von π zu 2π übergeht, nimmt die Ellipse nach einander die frühere Gestalt und Lage wieder an, bis sie schliesslich wieder mit der ersten Diagonale zusammenfällt. Die Aufeinanderfolge der Aenderungen ist in Fig. 3 dargestellt. Die Ellipse, welche ja schon vier gegebene Tan-

Fig. 3.



genten hat, ist vollständig bestimmt durch ihren Berührungspunkt P (Fig. 4) mit der Linie $v = b$.

Fig. 4.



Um die Beziehung dieses Punktes zu ε zu finden, ist es nur nöthig, zu beachten, dass, wenn $v = b$, $\cos 2\pi n t = 1$ ist und deshalb $u = a \cos \varepsilon$. Wenn nun die elliptische Bahn das

Resultat der Uebereinanderlagerung zweier harmonischen Schwingungen von nahezu zusammenfallender Höhe ist, so ändert sich ε gleichförmig mit der Zeit, so dass P selbst eine harmonische Schwingung längs $A\,A'$ ausführt mit einer Schwingungszahl, welche gleich der Differenz der beiden gegebenen Schwingungszahlen ist.

34. Lissajous[1]) hat gezeigt, dass dieses System von Ellipsen angesehen werden kann als die verschiedenen Bilder ein und derselben auf einem durchsichtigen Cylinder beschriebenen Ellipse. In Fig. 5 stellt $A\,A'\;B'B$ den Cylinder dar; $A\,B'$ ist ein ebener Schnitt desselben. Von einer unendlich grossen Entfernung aus in der Richtung der an die ebenen Schnitte in A gemeinsamen Tangente in A gesehen, erscheint der Cylinder als Rechteck projicirt und die Ellipse als dessen Diagonale. Nehmen wir jetzt an, der Cylinder würde mit der obigen Schnittebene um seine Axe gedreht. Seine eigene Projection bleibt ein constantes Rechteck, dem die Projection der Ellipse eingeschrieben ist.

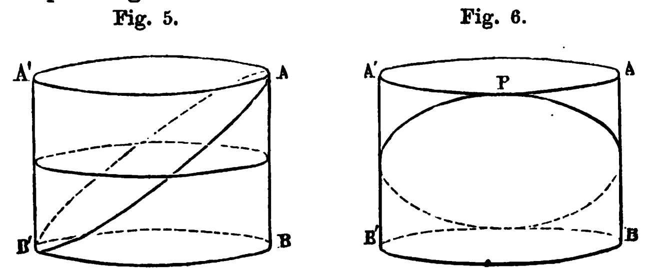


Fig. 5. Fig. 6.

Fig. 6 giebt die Stellung des Cylinders an nach einer Drehung um einen rechten Winkel. Es ergiebt sich hieraus, dass wir durch vollständige Umdrehung des Cylinders nach einander alle die Ellipsen erhalten, welche den Bahnen entsprechen, die von einem Punkte, der zwei harmonische Schwingungen von gleicher Periode und festen Amplituden ausführt, beschrieben werden. Ueberdies erhalten wir, wenn der Cylin-

[1]) Annales de Chimie (3), LI, 147.

der continuirlich mit gleichförmiger Geschwindigkeit umgedreht wird, was eine harmonische Bewegung von *P* sichert, eine vollständige Darstellung der verschiedenen Bahnen, welche von dem Punkte *P* beschrieben werden, wenn die Perioden der zwei Componenten wenig von einander abweichen; jede vollständige Umdrehung entspricht dabei dem Gewinne oder Verluste einer einzelnen Schwingung[1]). Die Umdrehungen des Cylinders sind daher synchron mit den Schwebungen, welche sich aus der Zusammensetzung der beiden Schwingungen ergeben würden, wenn diese in derselben Richtung vor sich gingen.

35. Schwingungen von der eben besprochenen Art lassen sich experimentell sehr leicht herstellen. Eine schwere Pendelkugel, welche mittelst eines langen Drahtes oder Fadens an einem festen Punkte hängt, beschreibt unter der Wirkung der Schwerkraft Ellipsen, welche in einzelnen Fällen, nach den Umständen der Projection, in gerade Linien oder Kreise übergehen können. Um aber diese Ellipsenbahnen zu sehen, ist es nothwendig, dass dieselben so rasch durchlaufen werden, dass der von dem sich bewegenden Punkte in irgend einem Momente seiner Bahn auf die Retina gemachte Eindruck keine Zeit hat, vollständig zu vergehen, ehe der zurückkommende Punkt wieder von Neuem seine Einwirkung erneuert. Diese Bedingung wird erfüllt durch ein versilbertes Knöpfchen (das durch Reflexion einen leuchtenden Punkt giebt), welches an einem geraden metallischen Draht befestigt wird (etwa einer Nähnadel), der mit dem untern Ende in einen Schraubstock eingespannt ist. Wenn der Draht in Bewegung gesetzt wird, so beschreibt der leuchtende Punkt Ellipsen, welche als feine Lichtlinien sichtbar werden. Diese Ellipsen würden sich allmälig in ihren Dimensionen unter dem Einflusse der Reibung zusammenziehen, bis sie schliesslich in einen festen leuchtenden Punkt übergegangen sind, ohne dabei irgend

---

[1]) Unter Schwingung wird in diesem Buche stets ein vollständiger Cyclus von Veränderungen verstanden.

[illegible] höchst wahr- [illegible] raht je nach [illegible] t wird, etwas [illegible] ständen sieht [illegible] der gesetzten [illegible]

[illegible] die Perioden [illegible] nahezu gleich [illegible] e Periode der [illegible] r haben dann:

[illegible] $t.$

[illegible] geometrische [illegible]

$$[illegible] \frac{v^2}{b^2} \quad . \quad . \quad 1),$$

[illegible] Curve darstellt [illegible]



Ist $\varepsilon = 0$ oder $= \pi$, so haben wir:

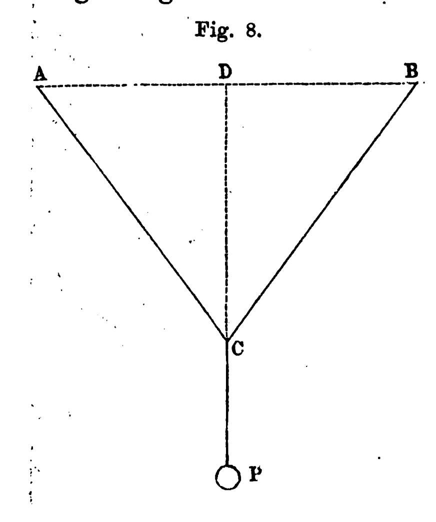
$$v^2 = \frac{b^2}{2}\left(1 \pm \frac{u}{a}\right).$$

Diese Gleichung stellt Parabeln dar. Fig. 7 (a. v. S.) zeigt die verschiedenen Curven für die Intervalle der Octave, Duodezime und Quinte.

Auf alle diese Systeme ist Lissajous' Methode der Darstellung auf einem durchsichtigen Cylinder anwendbar; wenn das Verhältniss der Phasen geändert wird entweder durch die verschiedenen Umstände der Projection in verschiedenen Fällen oder continuirlich wegen einer geringen Abweichung von der Genauigkeit in dem Periodenverhältniss, dann scheint der Cylinder sich zu drehen, so dass er dem Auge verschiedene Bilder derselben auf seiner Oberfläche gezogenen Linie bietet.

37. Es ist nicht schwer, ein schwingendes System so anzuordnen, dass die Bewegung eines Punktes aus zwei harmonischen Schwingungen, welche in senkrecht zu einander stehenden Ebenen vor sich gehen, besteht, wobei die Perioden ein beliebiges vorgezeichnetes Verhältniss haben. Die einfachste Vorrichtung ist die als Blackburn's Pendel bekannte. Ein Draht ACB wird an zwei festen Punkten A und B desselben Hebels befestigt. Die Kugel P ist im Mittelpunkte dieses Drahtes vermittelst eines zweiten Drahtes CP befestigt. Für Schwingungen in der Ebene der Zeichnung ist der Aufhängepunkt wesentlich C, vorausgesetzt, dass die Drähte

Fig. 8.



genügend gestreckt sind; bei einer Bewegung senkrecht zu dieser Ebene dreht sich die Kugel um *D*, indem sie den Draht *A C B* mit sich zieht. Die Schwingungsperioden in den Hauptebenen stehen in dem Verhältniss der Quadratwurzeln von *CP* und *DP*. Wenn daher $DC = 3\,CP$, so beschreibt die Kugel die Linien der Octave. Um die Aufeinanderfolge der Curven zu erhalten, welche dem angenäherten Einklange entsprechen, muss *A C B* so nahezu gerade gespannt sein, dass *C D* verhältnissmässig klein ist.

38. Eine andere Vorrichtung — das Kaleidophon genannt — wurde ursprünglich von Wheatstone erfunden. Ein gerader dünner Stahlstab, der an seinem obern Ende ein Kügelchen trägt, ist mit seinem untern Ende auf die Weise, wie es in dem vorigen Paragraphen erklärt worden, in einen Schraubstock eingespannt. Ist der Querschnitt des Stabes quadratisch oder ein Kreis, so ist die Schwingungsperiode unabhängig von der Ebene, in welcher die Schwingung vor sich geht. Wir wollen aber annehmen, dass der Querschnitt des Stabes ein Rechteck mit ungleichen Seiten ist. Die Steifheit des Stabes — d. i. die Kraft, mit welcher sich derselbe einer Biegung widersetzt, — ist dann in der Ebene von grösserer Dicke grösser; die Schwingungen in dieser Ebene haben daher die kürzere Periode. Durch eine zweckmässige Wahl für die Dicken können die Perioden der beiden componirenden Schwingungen in jedes beliebige, verlangte Verhältniss gebracht und die resultirende Curve gezeigt werden.

Das Mangelhafte an dieser Vorrichtung ist das, dass derselbe Stab nur eine Art von Figuren giebt. Um diesem Uebelstande zu begegnen, ist folgende Modification erdacht. Ein Stahlstreifen wird genommen, dessen rechtwinkliger Querschnitt sehr länglich ist, so dass für die Biegung in der einen Ebene die Steifheit so gross wird, dass der Streifen für Biegungen in dieser Ebene als starr anzusehen ist. Der Stab wird dann in zwei Theile getheilt und darauf werden die durchgebrochenen Enden wieder zusammengesetzt in der Weise, dass die beiden Stücke gegen einander um einen rechten Winkel gedreht sind.

Die Ebene, welche den kleinsten Durchmesser des einen enthält, enthält also den grössten Durchmesser des anderen Stückes. Wenn nun der so zusammengesetzte Stab in einen Schraubstock eingespannt wird an einem Punkte unterhalb der Verbindungstelle der beiden Stücke, so ist die Periode der Schwingung in der einen Richtung, welche fast allein von der Länge des oberen Theiles abhängt, nahezu constant; die in der zweiten Richtung kann dagegen verändert werden, indem man den Punkt verschiebt, an welchem das untere Ende eingeklemmt ist.

39. Bei dieser Anordnung vollführt der leuchtende Punkt selbst die Schwingungen, welche beobachtet werden sollen; bei Lissajous' Versuchsform bleibt der Lichtpunkt selbst wirklich fest, während sein Bild durch zwei aufeinander folgende Reflexionen an zwei schwingenden Spiegeln in eine sichtbare Bewegung versetzt wird. Ein kleines Loch in einem nahe an die Flamme einer Lampe gesetzten dunklen Schirm giebt einen Lichtpunkt, welcher nach Reflexion an den Spiegeln durch ein Fernrohr beobachtet wird. Die Spiegel, gewöhnlich von polirtem Stahl, sind an die Zinken von starken Stimmgabeln befestigt. Das Ganze wird dann so aufgestellt, dass der leuchtende Punkt, wenn die Stimmgabeln in Schwingung versetzt sind, harmonische Bewegungen in senkrecht auf einander stehenden Richtungen zu beschreiben scheint, welche von den Winkelbewegungen der reflectirenden Flächen herrühren. Die Amplituden und Perioden dieser harmonischen Bewegungen hängen von denen der entsprechenden Gabeln ab und können der Art abgeglichen werden, dass sie jede der mit dem Kaleidophon möglichen Figuren und zwar viel brillanter geben. Durch eine ähnliche Anordnung ist es möglich, die Figuren auf einen Schirm zu werfen. In jedem dieser Fälle ziehen sich dieselben allmälig zusammen in dem Maasse, wie die Schwingungen der Gabel verschwinden.

40. Die in diesem Capitel entwickelten Principien haben eine wichtige Anwendung bei der Untersuchung einer geradlinigen periodischen Bewegung gefunden. Wenn ein Punkt, etwa ein Theilchen einer tönenden Saite, mit solch einer Pe-

riode schwingt, dass der dadurch hervorgerufene Klang innerhalb der Grenzen des Gehörs liegt, so ist seine Bewegung viel zu rasch, als dass wir ihr mit dem Auge folgen könnten. Es muss demnach, wenn es erforderlich ist, die Art der Schwingung zu kennen, irgend eine indirecte Methode angewandt werden. Die einfachste hiervon ist theoretisch die: die zu untersuchende Schwingung mit einer gleichförmigen Verschiebungsbewegung in einer zur Schwingung senkrechten Richtung zu verbinden, wie das geschieht, wenn eine Stimmgabel eine harmonische Bewegung auf berusstem Papier aufzeichnet. Anstatt den schwingenden Körper selbst fortzubewegen, können wir uns eines rotirenden Spiegels bedienen, der uns ein in Bewegung begriffenes Bild liefert. Auf diese Weise erhalten wir eine Darstellung der charakteristischen Function der Schwingung, bei welcher die Abscissen proportional der Zeit sind.

Oft aber wird durch irgend einen Umstand die Anwendung dieser Methode schwierig oder unzweckmässig. In solchen Fällen können wir an Stelle der gleichförmigen Bewegung eine harmonische Schwingung in derselben Richtung von zweckmässiger Periode nehmen. Um uns an ein bestimmtes Beispiel zu halten, wollen wir annehmen, dass der Punkt, dessen Bewegung wir zu untersuchen wünschen, in verticaler Ebene mit einer Periode τ schwingt; wir wollen dann den Effect der Verbindung dieser Bewegung mit einer horizontalen harmonischen Bewegung untersuchen, deren Periode irgend ein Vielfaches von τ, etwa $n\tau$, ist. Auf einem rechtwinkligen Stück Papier ziehen wir die die verticale Bewegung darstellende Curve, indem wir die Axen derselben den Rändern des Papieres und weiter die Abscissen proportional der Zeit setzen; dabei wählen wir die Scala, nach welcher die Curve gezeichnet ist, so, dass das Papier gerade n Wiederholungen oder Wellen enthält. Schliesslich wird das Papier in Gestalt eines Cylinders, auf dem sich dann eine in sich zurücklaufende Curve befindet, rund gebogen. Ein Punkt, welcher diese Curve in solcher Weise beschreibt, dass er sich gleichmässig um die Axe des Cylinders dreht, wird aus der Entfernung gesehen die gegebene verticale Bewegung von der Periode τ, mit einer horizon-

talen harmonischen Bewegung von der Periode $n\tau$ verbinden. Umgekehrt muss man sich also, wenn man die Curve, welche die verticalen Schwingungen darstellt, erhalten will, den Cylinder, welcher die sichtbare Bahn erhält, längs einer seiner erzeugenden Linien getheilt und in eine Ebene abgerollt denken. Ist der Ausgleich der Perioden nicht ganz genau, so macht es weniger Schwierigkeit, den Cylinder und die Lage der Curve auf ihm zu verstehen; denn dann scheint der Cylinder sich zu drehen, und Bewegungen in entgegengesetztem Sinne dienen dazu, die Theile der Curve zu unterscheiden, welche auf der näheren und entfernteren Fläche des Cylinders liegen.

41. Die harmonische Hülfsbewegung wird allgemein optisch erhalten durch ein von Lissajous erfundenes Instrument, das Vibrationsmikroskop genannt. Eine Zinke einer grossen Stimmgabel trägt eine Linse, deren Axe senkrecht zu der Richtung der Schwingungen ist. Diese Linse kann entweder allein für sich oder als das Objectiv eines zusammengesetzten Mikroskops gebraucht werden, das durch Hinzufügung eines unabhängig von jener befestigten Oculars gebildet wird. In beiden Fällen wird ein fester, durch diese Linsen beobachteter Punkt in eine scheinbare harmonische Bewegung ausgezogen längs einer parallel zu den Schwingungen der Gabel gehenden Linie.

Das Vibrationsmikroskop kann dazu benutzt werden, die Strenge und Allgemeinheit des Gesetzes zu beweisen, welches Höhe und Periode verbindet. Man findet so, dass jeder Punkt eines schwingenden Körpers, welcher einen reinen musikalischen Klang giebt, eine in sich zurückkehrende Curve zu beschreiben scheint, wenn er mit einem Vibrationsmikroskop untersucht wird, dessen Tonhöhe im genauen Einklang mit der Tonhöhe dieses schwingenden Körpers ist. Auf dieselbe Weise kann die Richtigkeit der den consonirenden Intervallen entsprechenden Verhältnisse nachgewiesen werden; jedoch ist zu dem letztern Zwecke eine vollkommenere akustische Methode, welche in einem der späteren Capitel beschrieben wird, vorzuziehen.

42. Eine andere Methode, die Bewegung eines schwingenden Körpers zu untersuchen, beruht auf der Anwendung von intermittirender Beleuchtung. Nehmen wir z. B. an, dass mittelst eines zweckmässigen Apparates in regelmässigen Intervallen τ eine Reihe von elektrischen Funken erhalten wird. Ein schwingender Körper, dessen Periode ebenfalls τ ist, muss im Lichte der Funken untersucht in Ruhe erscheinen, weil er nur in einer Lage gesehen werden kann. Wenn indessen seine Schwingungsdauer auch um noch so wenig von τ abweicht, so ändern sich die beleuchteten Lagen; der Körper scheint langsam zu schwingen mit einer Schwingungszahl, welche die Differenz von der der Funken und der des Körpers ist. Die Art der Schwingung vermag man dann mit Leichtigkeit zu beobachten.

Die Reihe der Funken kann durch einen Inductionsapparat erhalten werden, dessen primäre Rolle periodisch durch eine schwingende Gabel oder durch einen andern Unterbrecher von hinreichender Genauigkeit unterbrochen wird. Eine bessere Wirkung erhält man aber durch Sonnenlicht, das intermittirend gemacht wird mittelst einer Stimmgabel, deren Zinken zwei kleine, nahe an einander befindliche Metallplatten parallel der Ebene der Schwingungen tragen. In jeder Platte ist parallel den Zinken der Gabel ein Schlitz so angebracht, dass das Licht frei durch beide Schlitze hindurch kann, wenn die Gabel sich in Ruhe befindet oder gerade durch den Mittelpunkt der Schwingungen hindurchgeht. Durch die so gebildete Oeffnung hindurch wird ein Strahl von Sonnenlicht mittelst einer Brennlinse concentrirt, und dann das zu untersuchende Object in den Kegel der auf der andern Seite divergirenden Strahlen gebracht[1]). Wird nun die Gabel durch eine elektro-magnetische Vorrichtung in Schwingungen versetzt, so wird die Beleuchtung abgeschnitten, mit Ausnahme der Momente, wo die Gabel wirklich oder nahezu durch ihre Gleichgewichtslage hindurchgeht. Die nach dieser Methode erhaltenen Lichtblitze sind nicht so momentan, wie elektrische Fun-

---

[1]) Töpler, Phil. Mag., Jan. 1867.

ken (namentlich wenn eine Leydener Flasche mit der secundären Rolle verbunden ist), indess ist in vielen Fällen die Regelmässigkeit eine vollkommenere. Es muss aber sorgfältig darauf geachtet werden, dass fremdes Licht so viel wie möglich abgeschlossen wird; die Wirkung ist dann sehr überraschend.

Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn man durch eine Reihe von Löcher, die in einem Kreise auf einer sich umdrehenden Scheibe angebracht sind, nach dem schwingenden Körper sieht. Verschiedene Löcherreihen können auf derselben Scheibe angebracht werden, indess ist die Beobachtung ohne einige Fürsorge für die Sicherung einer gleichmässigen Rotation nicht genau.

Ausser in Bezug auf die Schärfe der Definition ist sonst das Resultat dasselbe, wenn die Periode des Lichtes irgend ein Vielfaches von der des schwingenden Körpers ist. Auf diesen Punkt ist wohl zu achten, wenn die rotirende Scheibe gebraucht werden soll, um eine unbekannte Schwingungszahl des schwingenden Körpers zu bestimmen.

Ist die Schwingungszahl des unterbrochenen Lichtes ein genaues Vielfache von der der Schwingung, so wird das Object ohne scheinbare Bewegung gesehen, im Allgemeinen indess in mehr wie einer Lage. Manchmal ist eine solche Zustandsbedingung von Vortheil.

Aehnliche Wirkungen treten auf, wenn die Schwingungszahlen der Schwingungen und der Lichtblitze in dem Verhältniss von zwei kleinen Zahlen zu einander stehen. Wenn z. B. die Anzahl der Schwingungen in einer bestimmten Zeit halb so gross wie die Anzahl der Lichtblitze ist, so wird der Körper feststehend, aber im Allgemeinen doppelt erscheinen.

Drittes Capitel.

Systeme, welche einen Grad von Freiheit besitzen.

43 (195)[1]. Die materiellen Systeme, mit deren Schwingungen die Akustik zu thun hat, sind gewöhnlich in hohem Grade complicirt und können sehr verschiedene Arten von Schwingungen machen, die entweder alle oder nur zum Theil in jedem beliebigen Moment auch zusammen bestehen können. In der That ist bei einigen der wichtigsten musikalischen Instrumente, wie bei den Saiten und den Orgelpfeifen, die Anzahl der von einander unabhängigen Schwingungsarten theoretisch unendlich gross; eine nähere Betrachtung einiger derselben ist für die meisten praktischen Fragen, welche die Natur der consonirenden Accorde betreffen, nothwendig. Oft indessen treten von selbst Fälle auf, bei denen eine Art von Schwingungen von vorwiegender Bedeutung ist; selbst wenn dies nicht der Fall wäre, würde es sich doch empfehlen, die Betrachtung des allgemeinen Problems mit diesem einfachsten Fall zu beginnen — das ist der Fall, wenn das System einen Grad von Freiheit hat. Es ist hierbei nicht nöthig anzunehmen, dass die unten näher betrachtete Schwingungsart die einzig mögliche ist, weil,

---

[1]) Die eingeklammerten Zahlen geben die Paragraphen der Theoretischen Physik von Thomson und Tait an, in welchen der Leser das in den beistehenden Paragraphen dieses Buches Behandelte ausführlicher findet.

so lange Schwingungen anderer Art nicht eintreten, deren blosse Möglichkeit unter anderen Umständen von keinem Belang ist.

44 (213 und 273). Die Bedingung für ein System, welches einen Grad von Freiheit besitzt, wird bestimmt durch den Werth einer einzelnen Coordinate u, deren Anfangswerth man der Gleichgewichtslage entsprechen lassen kann. Die kinetische und potentielle Energie des Systems sind für irgend eine bestimmte Lage proportional resp. $\dot{u}^2$ und u^2:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \text{ [1]}, \quad V = \frac{1}{2} \mu u^2 \quad \ldots \ldots \quad (1);$$

hier sind m und μ im Allgemeinen Functionen von u. Beschränken wir uns indess auf die Betrachtung von Lagen, welche sich in der unmittelbaren Nachbarschaft der dem Gleichgewicht entsprechenden Lage befinden, so ist u eine kleine Grösse, und m und μ sind dann merklich constant. Von dieser Voraussetzung aus wollen wir nun weitergehen. Sind keine Kräfte vorhanden, weder solche, die von innerer Reibung oder Viscosität herrühren, noch solche, die von aussen auf das System einwirken, so bleibt die ganze Energie constant. Demnach:

$$T + V = Const.$$

Setzen wir für T und V ihre Werthe und differentiren die Gleichung nach der Zeit, so erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{u} + \mu u = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

deren vollständiges Integral ist:

$$u = a \cos(n t - \alpha) \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

wenn $n^2 = \mu : m$; es stellt dieses Integral also eine harmonische Schwingung dar. Wir werden sehen, dass die Periode

---

[1]) Verfasser bezeichnet die einzelnen Differentialquotienten durch Punkte über dem Argument; also $\dot{u} = \frac{du}{dt}$; $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ etc.

allein von der Natur des Systemes abhängt, während die Amplitude und Phase durch verschiedene Umstände bedingt werden. Wenn die Differentialgleichung genau wäre, d. h. wenn T genau proportional $\dot{u}^2$ und V ebenso genau proportional u^2 wäre, so würden ohne eine Einschränkung die Schwingungen des Systems um die Gleichgewichtslage des letzteren genau harmonische sein. Indess ist in der Mehrzahl der Fälle diese Proportionalität nur angenähert, da sie auf der Annahme beruht, dass die Verschiebung u stets klein ist — wie klein, das hängt von der Natur des einzelnen Systems und dem Grade der gewünschten Annäherung ab. Selbstverständlich müssen wir vorsichtig genug sein, die Anwendung des Integrals nicht über die Grenzen der Gültigkeit desselben hinaus zu treiben.

Wenn nun auch das Princip, dass die Schwingungen eines Systems um eine Gleichgewichtslage eine Periode haben, die nur von der Structur des Systems und nicht von den einzelnen Umständen abhängt, nur innerhalb gewisser Grenzen aufgestellt werden kann, so ist dasselbe doch von ausserordentlicher Wichtigkeit, sowohl vom theoretischen Gesichtspunkte aus, als auch vom praktischen. Wäre die Höhe und Stärke eines von einem musikalischen Instrumente gegebenen Klanges nicht innerhalb weiter Grenzen in dieser Weise unabhängig von den sonstigen Umständen, so müsste die Art des Vortrags auf vielen Instrumenten, wie auf der Violine und dem Klaviere, vollständig umgestossen werden.

Die Schwingungsdauer oder Periode ist:

$$\tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\mu}} \quad \dots\dots\dots \quad (4).$$

Eine Zunahme von m oder eine Abnahme von μ verlängert daher die Dauer einer Schwingung. Verallgemeinern wir die bei einem materiellen Theilchen, das durch Federkraft nach einer Gleichgewichtslage getrieben wird, gebrauchte Ausdrucksweise, so können wir m die Trägheit des Systems und μ die Kraft der äquivalenten Federkraft nennen. Es vergrössert also eine Vermehrung der Masse oder eine Abspannung der Feder die Schwingungsdauer. Mit Hülfe dieses Princips können wir manchmal Grenzen für den Werth einer

Periode erhalten, welche genau gar nicht oder wenigstens nicht leicht berechnet werden kann.

45. Die Abwesenheit aller Reibungskräfte ist indess nur ein idealer Fall, welcher nur angenähert in der Praxis erfüllt wird. Die ursprüngliche Energie einer Schwingung wird stets früher oder später zerstreut durch Umsetzung in Wärme. Es ist aber ausserdem noch eine andere Verlustquelle vorhanden, welche, wenn sie auch im eigentlichen Sinne nicht dissipativ ist, d. i. die Energie nicht zerstreut, doch Wirkungen fast derselben Art hervorruft. Nehmen wir eine im luftleeren Raume schwingende Stimmgabel. Die innere Reibung wird allmälig die Bewegung verlangsamen, die ursprüngliche Energie wird in Wärme umgesetzt sein. Wir wollen nun die Stimmgabel in einen offenen Raum bringen. Genau genommen bilden dann die Gabel und die umgebende Luft ein einziges System, dessen Theile nicht getrennt behandelt werden können. Versuchen wir indess eine genaue Lösung für ein so complicirtes Problem, so werden wir bald durch mathematische Schwierigkeiten aufgehalten, so dass in jedem Falle nur eine angenäherte Lösung zu wünschen übrig bleibt. Die Einwirkung der Luft während weniger Schwingungen ist ganz unbedeutend, sie wird erst von Einfluss durch Summirung der einzelnen Einwirkungen. Wir werden daher ihren Einfluss anzusehen haben als eine Störung der Bewegung, welche im Vacuum stattfinden würde. Diese störende Kraft ist periodisch (mit derselben Annäherung, wie es die Schwingungen sind) und kann in zwei Theile getheilt werden, von denen der eine proportional der Beschleunigung, der andere proportional der Geschwindigkeit ist. Der erstere giebt dieselbe Wirkung, als wenn die schwingende Masse der Gabel geändert würde, wir haben mit ihm augenblicklich nichts mehr zu thun. Der letztere ist eine Kraft, welche arithmetisch der Geschwindigkeit proportional ist und stets in einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung wirkt; er wird daher Wirkungen hervorbringen von demselben Charakter, wie die durch die Reibung bewirkten. In vielen ähnlichen Fällen kann der Verlust an Bewegung durch

Mittheilung ebenfalls von demselben Gesichtspunkte aus behandelt werden, wie der durch die eigentliche Zerstreuung hervorgebrachte, und wird demnach in der Differentialgleichung mit einem für akustische Zwecke genügenden Grad von Annäherung durch ein der Geschwindigkeit proportionales Glied dargestellt. Daher ist:

$$\ddot{u} + \kappa\dot{u} + n^2 u = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die Schwingungsgleichung für ein System mit einem Grad von Freiheit, das aber reibenden Kräften unterworfen ist. Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$u = Ae^{-\frac{1}{2}\kappa t} \cos\left\{\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}\kappa^2}\,.\,t - \alpha\right\} \; . \; . \quad (2).$$

Wenn die Reibung so gross ist, dass $\frac{1}{4}\kappa^2 > n^2$, so ändert sich die Form der Lösung; letztere entspricht dann nicht mehr einer oscillatorischen Bewegung. Indess ist bei allen akustischen Anwendungen κ eine kleine Grösse. Unter solchen Umständen kann Gleichung (2) als Ausdruck einer harmonischen Bewegung angesehen werden, deren Amplitude nicht constant ist, sondern für gleiche Zeitenräume in geometrischer Reihe abnimmt. Die Differenz der Logarithmen von den auf einander folgenden grössten Ausschlägen ist nahezu constant; sie wird das Logarithmische Decrement genannt. Ausgedrückt wird dieselbe durch $\frac{1}{4}\kappa\tau$, wenn τ die Schwingungsdauer ist.

Die Schwingungszahl, welche von $n^2 - \frac{1}{4}\kappa^2$ abhängt, enthält bloss die zweite Potenz von κ, so dass in der ersten Annäherung die Reibung keine Wirkung auf die Periode hat, — ein Princip von sehr allgemeiner Anwendbarkeit.

Die hier betrachtete Schwingung wird die freie Schwingung genannt. Sie wird von einem System ausgeführt, das aus dem Gleichgewicht herausgebracht und dann sich selbst überlassen wird.

46. Wir müssen jetzt unsere Aufmerksamkeit auf ein anderes, nicht weniger wichtiges Problem richten, d. i. auf das Verhalten des Systems, wenn dasselbe einer Kraft unterliegt, die sich nach einer harmonischen Function mit der Zeit ändert. Um uns vor Wiederholungen zu hüten, können wir sofort den allgemeineren Fall nehmen, der die Reibung einschliesst. Wenn keine Reibung vorhanden ist, haben wir einfach in unseren Resultaten $\varkappa = 0$ zu setzen. Die zu Grunde liegende Differentialgleichung ist

$$\ddot{u} + \varkappa\dot{u} + n^2 u = E \cos pt \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Nehmen wir an:

$$u = a \cos(pt - \varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

setzen dieses in die Gleichung, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &a(n^2 - p^2)\cos(pt - \varepsilon) - \varkappa p a \sin(pt - \varepsilon) \\ &= E \cos\varepsilon \cos(pt - \varepsilon) - E \sin\varepsilon \sin(pt - \varepsilon). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\cos(pt - \varepsilon)$ und $\sin(pt - \varepsilon)$:

$$\left.\begin{aligned} a(n^2 - p^2) &= E \cos\varepsilon \\ a \cdot p\varkappa &= E \sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

so dass wir die Lösung schreiben können:

$$u = \frac{E \sin\varepsilon}{p\varkappa} \cos(pt - \varepsilon) \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

wobei

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{p\varkappa}{n^2 - p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Diese Art von Schwingung wird eine erzwungene Schwingung genannt; sie erfolgt unter Wirkung einer von aussen auf das System wirkenden Kraft und wird durch die dauernde Einwirkung dieser Kraft aufrecht erhalten. Die Amplitude ist proportional E — der Grösse der Kraft; die Periode ist dieselbe wie die der Kraft.

Wir wollen nun E als gegeben annehmen und die Wirkung aufsuchen, die eine Aenderung der Periode der Kraft auf ein gegebenes System ausübt. Die in verschiedenen Fällen

hervorgerufenen Wirkungen sind unter einander nicht genau ähnlich, weil die Schwingungszahl der hervorgerufenen Schwingungen stets dieselbe, wie die der wirkenden Kraft, und daher bei der Vergleichung verschiedener Fälle, die wir anstellen wollen, variabel ist. Wir können indessen in verschiedenen Fällen die Energie des Systems in dem Augenblick des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage vergleichen. Es ist nothwendig, den Augenblick näher anzugeben, in welchem in jedem Falle die Energie berechnet werden soll, weil während der Schwingung die ganze Energie nicht unveränderlich ist. Während des einen Theiles der Schwingungsdauer empfängt das System Energie von der drängenden äusseren Kraft, während des übrigen Theiles der Schwingungsdauer giebt es diese Energie wieder ab.

Aus Gleichung 4) folgt, wenn $u = 0$

Energie $\propto \dot{u}^2 \propto \sin^2 \varepsilon$ [1]).

Die Energie hat daher ein Maximum, wenn $\sin \varepsilon = 1$ oder nach (5), wenn $p = n$. Wird das Maximum der kinetischen Energie mit T_0 bezeichnet, so haben wir:

$$T = T_0 \sin^2 \varepsilon \qquad (6).$$

Die kinetische Energie der Bewegung ist daher die grösstmöglichste, wenn die Periode der Kraft die ist, mit welcher das System frei unter Einfluss seiner eigenen Elasticität (oder anderer inneren Kräfte) ohne Reibung schwingen würde. Die Schwingung ist dann nach (4) und (5):

$$u = \frac{E}{n\varkappa} \sin n t.$$

Die Amplitude ist darnach sehr gross, wenn $\varkappa$ klein ist. Die Phase ist um eine viertel Periode hinter der der Kraft zurück.

Der Fall, bei welchem $p = n$ ist, kann auch unabhängig für sich behandelt werden. Da die Periode der thatsächlichen Schwingung dieselbe ist wie die dem System:

$$\ddot{u} + n^2 u = 0$$

[1]) Das Zeichen $\propto$ braucht Verfasser für Proportionalität.

eigene, so wird hierdurch die Differentialgleichung (1) reducirt auf:

$$\varkappa \dot{u} = E \cos p\, t.$$

Hieraus erhalten wir durch Integration:

$$u = \frac{E}{\varkappa} \int \cos p\, t\, d\, t = \frac{E}{p\, \varkappa} \sin p\, t,$$

wie vorher.

Ist p kleiner wie n, so liegt die Verzögerung in der Phase gegen die Phase der Kraft zwischen Null und einer viertel Periode; wenn p grösser ist wie n, zwischen einer viertel und einer halben Periode.

(i.e. $k=0$) von (1)

Bei einem System ohne Reibung ist die Lösung:

(5) shows th. $\varepsilon = 0$; subst. pk from (5) into (4): $u = \frac{E \cos \varepsilon}{n^2 - p^2} \cos(pt - \varepsilon)$

$$u = \frac{E}{n^2 - p^2} \cos p\, t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Wenn p kleiner wie n ist, so stimmt die Phase der Schwingung mit der der Kraft überein, ist aber p grösser als n, so ändert sich das Vorzeichen der Schwingung. Die Phasenänderung von vollständiger Uebereinstimmung bis zum vollständigen Gegensatze, welche bei Vorhandensein von Reibung allmälig eintritt, findet hier plötzlich statt, wenn p durch den Werth n hindurch geht. Zu gleicher Zeit wird dann der Ausdruck für die Amplitude unendlich. Natürlich hat dieser Umstand nur die Bedeutung, dass im Falle der Gleichheit der Perioden (der Schwingung und der Kraft) Reibung mit in Rechnung gezogen werden muss, wie klein dieselbe auch sein mag und wie unbedeutend ihre Einwirkung, wenn p und n nicht annähernd einander gleich sind. Weiter müssen wir auch stets der Beschränkung in Betreff der Grösse der Schwingung, der unsere Schwingungen unterliegen, eingedenk sein.

Es wird manchmal als ein Paradoxon hingestellt, dass der Ausschlag sein Maximum in der einen Richtung erreicht, wenn die einwirkende Kraft gerade ihr Maximum in der entgegengesetzten Richtung hat, wie das z. B. bei der Canal-

Theorie[1]) der Fluth eintritt. Jede Schwierigkeit, welche man empfindet, wird entfernt werden, wenn man den extremen Fall betrachtet, für welchen die „elastische Kraft“ verschwindet, so dass die natürliche Periode unendlich gross wird. In der That brauchen wir uns bloss die Kraft anzusehen, welche auf die Kugel eines gewöhnlichen, frei schwingenden Pendels wirkt; hierbei ist der Ausschlag nach einer Seite der grösste, wenn die Schwerkraft ihr Maximum nach der entgegengesetzten Richtung hin hat. Wenn andererseits die Trägheit des Systems sehr klein ist, so haben wir den andern extremen Fall, bei welchem die sogenannte Gleichgewichtstheorie anwendbar ist, für welche nämlich Kraft und Ausschlag sich in derselben Phase befinden.

Ist die Kraftperiode länger wie die natürliche Periode, so führt eine hinzukommende Reibung eine Verzögerung in der Phase der Verschiebung ein, welche zwischen Null und einer viertel Periode variirt. Ist indessen die Periode der natürlichen Schwingung die längere, so wird die ursprüngliche Verzögerung von einer halben Periode um einen geringen Theil einer viertel Periode vermindert; d. i. die Wirkung der Reibung ist die, dass dieselbe die Phase der Verschiebung, von der bei gänzlichem Fehlen der Reibung angerechnet, beschleunigt. In jedem Falle geht der Einfluss der Reibung dahin, eine Annäherung an den Zustand der Dinge zu bewirken, der obwalten wird, wenn die Reibung überwiegt.

Wenn eine Kraft von einer Periode, die nahezu gleich ist mit der der freien Schwingung, sich langsam bis zu einem Maximum ändert und dann langsam abnimmt, so erreicht die Verschiebung ihr Maximum erst, nachdem die Kraft angefangen hat, abzunehmen. Unter Wirkung der Kraft bei ihrem Maximum wächst die Schwingung andauernd, bis eine bestimmte Grenze erreicht ist; dieses Anwachsen dauert eine Zeitlang

---

[1]) Die Canal-Theorie der Fluth ist eine hydronamische Theorie der letzteren, bei welcher der Ocean auf einen Canal um den Aequator von gleichförmiger Tiefe und Breite vorausgesetzt wird. Airy, Tides and Waves.

noch fort, selbst wenn die Kraft, nachdem sie ihr Maximum erreicht hat, abzunehmen beginnt. Aus diesem Princip ist das Zurückbleiben der Springfluthen hinter den Tagen des Neu- und Vollmondes erklärt worden[1]).

47. Daraus, dass die obigen Differentialgleichungen linear sind, folgt, dass die aus dem gleichzeitigen Zusammenwirken irgend einer Anzahl von Kräften entstehende Bewegung die einfache Summe der durch die Kräfte einzeln hervorgerufenen Bewegungen ist. Jede Kraft bewirkt die ihr eigene Schwingung, ohne von der Gegenwart oder Abwesenheit anderer Kräfte beeinflusst zu werden. Die besonderen Eigenschaften der Kraft werden daher in einer bestimmten Weise auf die Bewegung des Systems übertragen. Wenn z. B. die Kraft in der Zeit τ periodisch ist, so wird sich hieraus stets eine Schwingung ergeben. Jedes harmonische Element der Kraft ruft eine entsprechende harmonische Schwingung in dem Systeme hervor. Da aber die Phasenverzögerung ε und das Verhältniss der Amplituden $a:E$ für die verschiedenen Componenten nicht dieselben Werthe haben, so ist die resultirende Schwingung, wenn sie auch in derselben Zeit periodisch ist, in ihrem Charakter verschieden von der Kraft. Es kann z. B. eintreten, dass eine der Componenten vollständig oder nahezu isochron mit der freien Schwingung ist; sie wird sich dann in der Bewegung äussern in einer Weise, die gar nicht im Verhältnisse zu ihrer ursprünglichen Stärke steht. Als ein zweites Beispiel können wir ein System nehmen, auf welches zwei Kräfte von nahezu gleicher Periode wirken. Die resultirende Schwingung, die sich aus zwei nahezu im Einklang stehenden zusammensetzt, ist nach den im letzten Capitel auseinander gesetzten Principien intermittirend.

Zu den Bewegungen, welche der unmittelbare Ausfluss einwirkender Kräfte sind, muss, wenn man die allgemeinste Lösung erhalten will, stets das Glied, welches die freie Schwingung ausdrückt, hinzugefügt werden. Wir haben somit im Falle einer einwirkenden Kraft:

---

[1]) Airy's Tides and Waves, Art. 328.

$$u = \frac{E \sin \varepsilon}{p \varkappa} \cos(p t - \varepsilon) + A e^{-\frac{1}{2}\varkappa t} \cos\left\{\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}\varkappa^2} \cdot t - \alpha\right\} \quad (1).$$

A und α sind hier willkürlich.

48. Die Unterscheidung zwischen erzwungener und freier Schwingung ist sehr wichtig und fordert ein klares Verständniss. Die Periode der ersteren wird einzig durch die Kraft bestimmt, welche von aussen auf das System wirken soll, während die der letzteren nur von der Constitution des Systems selbst abhängt. Ein anderer Unterscheidungspunkt ist der, dass eine erzwungene Schwingung so lange, wie der äussere Einfluss einzuwirken anhält, permanent ist, indem sie genau durch eine harmonische Function dargestellt bleibt; eine freie Schwingung verschwindet dagegen allmälig, so dass sie schliesslich nach einiger Zeit ganz zu vernachlässigen ist. Nehmen wir z. B. an: das System sei in Ruhe, wenn die Kraft $E \cos p t$ anfängt zu wirken. Es müssen dann den Constanten A und α in Gleichung (1) aus §. 47 solche Werthe gegeben werden, dass u sowohl wie $\dot{u}$ im Anfange gleich Null sind. Zunächst ist noch eine freie Schwingung vorhanden, die eine nicht geringere Bedeutung wie ihre Rivalin besitzt; jedoch hat Reibung nach einiger Zeit dieselbe auf eine so unbedeutende reducirt, dass die erzwungene Schwingung allein im Besitze des Kampfplatzes zwischen den Schwingungen bleibt. Diese Lage der Dinge dauert so lange an, wie die Kraft einwirkt. Wenn die Kraft aufhört zu wirken, so tritt natürlich keine Discontinuität in den Werthen von u und $\dot{u}$ ein; jedoch wird die gebundene Schwingung auf einmal in eine freie Schwingung umgewandelt; die Periode der Kraft wird gegen die, welche dem System allein eigen ist, ausgetauscht.

Während der Coexistenz von zwei Schwingungen in den ersten Theilen der Bewegung kann die sonderbare Erscheinung der Schwebungen eintreten, wenn die zwei Perioden nur wenig von einander abweichen. Denn wenn n und p nahezu gleich sind und $\varkappa$ klein ist, so sind die Anfangsbedingungen annähernd erfüllt durch:

$$u = a \cos(pt - \varepsilon) - a e^{-\frac{1}{2}\varkappa t} \cos\left\{\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}\varkappa^2} \cdot t - \varepsilon\right\}.$$

Hier haben wir also ein Steigen und Fallen in der Bewegung, so lange $e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}$ merkbar bleibt. Diese Intermittenz ist sehr gut bemerkbar bei den ersten Stadien der Bewegung von elektromagnetisch erregten Stimmgabeln (§. 63).

49. Schwingende Systeme von einem Grad der Freiheit können auf zwei Weisen von einander verschieden sein, je nach den Werthen der Constanten n und $\varkappa$. Die Unterscheidung der Höhe ist hinreichend verständlich. Es ist aber wohl der Mühe werth, genauer den Einfluss eines grösseren oder geringeren Grades in der Dämpfung der Schwingungen aufzusuchen. Am Augenfälligsten ist in Bezug hierauf die mehr oder weniger rasche Auslöschung einer freien Schwingung. Die Grösse der in dieser Richtung zu beachtenden Einwirkung kann durch die Anzahl der Schwingungen gemessen werden, welche vergehen müssen, bevor die Amplitude in einem bestimmten Verhältniss reducirt ist. Die anfängliche Amplitude können wir als Einheit nehmen; nach einer Zeit t sei dieselbe ϑ. Dann ist $\vartheta = e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}$. Setzen wir $t = x\tau$, so haben wir:

$$x = -\frac{2}{\varkappa\tau} \log \vartheta.$$

Bei einem System, dessen Schwingungen nur in mässigem Grade gedämpft werden, können wir annähernd nehmen:

$$\tau = 2\pi : n,$$

so dass

$$x = -\frac{n}{\varkappa\pi} \log \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese Gleichung giebt die Anzahl der Schwingungen, welche vollführt werden müssen, ehe die Amplitude auf ϑ gesunken ist.

Der Einfluss der Dämpfung wird ebenso in bedeutendem Maasse gefühlt bei einer erzwungenen Schwingung, wenn bei derselben eine starke Annäherung an den Isochronismus zwischen der Kraft und der natürlichen Schwingung vorhanden

ist. Sind p und n genau einander gleich, so bewirkt die Dämpfung allein, dass die Bewegung nicht unendlich gross wird. Wir können leicht vorhersehen, dass bei geringer Dämpfung eine vergleichsweise kleine Abweichung von dem vollkommenen Isochronismus die Grösse der Schwingungen um sehr Viel verringert, während bei einer grössern Dämpfung derselbe Grad von Genauigkeit in der Ausgleichung der Perioden nicht erforderlich ist. Aus den Gleichungen:

$$T = T_0 \sin^2 \varepsilon, \ \tan \varepsilon = \frac{\varkappa p}{n^2 - p^2}$$

erhalten wir ja:

$$\frac{n^2 - p^2}{\varkappa p} = \sqrt{\frac{T_0 - T}{T}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2);$$

hiernach muss, wenn $\varkappa$ klein ist, p sehr nahezu gleich n sein, damit eine Bewegung entsteht, welche nicht um sehr viel kleiner wie die mögliche Maximalbewegung ist.

Die zwei hauptsächlichsten Wirkungen der Dämpfung können mit einander verglichen werden, indem man $\varkappa$ zwischen (1) und (2) eliminirt. Das Resultat dieser Elimination ist:

$$\frac{\log \vartheta}{x} = \pi \left(\frac{p}{n} - \frac{n}{p}\right) \sqrt{\frac{T}{T_0 - T}} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Das Zeichen der Quadratwurzel muss hierbei so gewählt werden, dass die rechte Seite negativ wird.

Wenn bei einem freischwingenden System die Amplitude in dem Verhältnisse von ϑ nach x Schwingungen vermindert ist, so wird, wenn auf das System eine Kraft p einwirkt, die Energie der resultirenden Bewegung in dem Verhältnisse $T : T_0$ geringer sein, wie die beim vollkommenen Isochronismus. Es ist von keiner Bedeutung, ob die erzwungene oder die freie Schwingung die höhere ist; alles hängt ab von dem Intervall zwischen ihnen.

In den meisten Fällen, die von Interesse sind, ist das Intervall klein; dann kann, indem wir $p = n + \delta n$ setzen, die obige Formel geschrieben werden:

$$\frac{\log \vartheta}{x} = \frac{2 \pi \delta n}{n} \sqrt{\frac{T}{T_0 - T}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Die folgende nach dieser Formel berechnete Tabelle wurde von Helmholtz[1]) angegeben:

Intervall (ausgedrückt in Differenz der Tonhöhen), durch welches die Intensität des Mitschwingens auf ein Zehntel reducirt wird $T : T_0 = 1 : 10$	Zahl der Schwingungen, nach welchen die Intensität der freien Schwingung auf ein Zehntel reducirt wird $\vartheta^2 = \frac{1}{10}$
1. Ein achtel Ton	38,00
2. Ein viertel Ton	19,00
3. Ein halber Ton	9,50
4. Drei viertel Ton	6,33
5. Ein ganzer Ton	4,75
6. Fünf viertel Ton	3,80
7. Kleine Terz ($^3/_2$ Töne)	3,17
8. Sieben viertel Ton	2,71
9. Grosse Terz (2 ganze Töne)	2,37

Formel (4) zeigt, dass δn, wenn es klein ist, *caeteris paribus* sich wie $\frac{1}{x}$ ändert.

50. Aus Beobachtungen von erzwungenen Schwingungen, die von bekannten Kräften herrühren, kann die natürliche Periode und die Dämpfung eines Systems bestimmt werden. Die bezüglichen Formeln sind:

$$u = \frac{E \sin \varepsilon}{p \varkappa} \cos (p t - \varepsilon),$$

wobei:

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{p \varkappa}{n^2 - p^2}.$$

Nach der Gleichgewichtstheorie würden wir haben:

$$u = \frac{E}{n^2} \cos p t.$$

[1]) Tonempfindungen S. 221.

Das Verhältniss der thatsächlichen Amplitude zu dieser ist:

$$\frac{E \sin \varepsilon}{p \varkappa} : \frac{E}{n^2} = \frac{n^2 \sin \varepsilon}{p \varkappa}.$$

Wenn nun die Gleichgewichtstheorie bekannt ist, so giebt uns die Vergleichung der Amplituden den Werth von

$$\frac{n^2 \sin \varepsilon}{p \varkappa},$$

etwa

$$\frac{n^2 \sin \varepsilon}{p \varkappa} = a,$$

ε ist ebenfalls bekannt, daraus:

$$n^2 = p^2 : \left(1 - \frac{\cos \varepsilon}{a}\right), \text{ und } \varkappa = \frac{p \sin \varepsilon}{a - \cos \varepsilon} \quad . \quad . \quad (1).$$

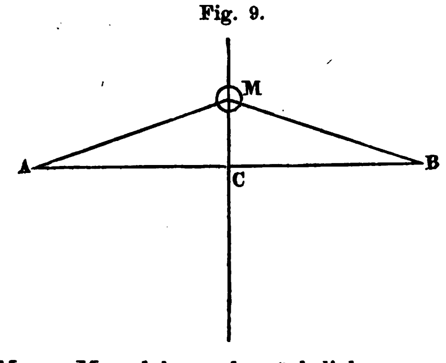
51. Die Unterscheidung zwischen unfreier und freier Schwingung ist, wie wir schon gezeigt haben, von grosser Wichtigkeit; es mag indess bemerkt werden, dass die meisten der erzwungenen Schwingungen, mit deren Auftreten in einem System wir zu thun haben, ihren Ursprung schliesslich in der Bewegung eines zweiten Systems nehmen, welches das erste beeinflusst und seinerseits wieder von diesem beeinflusst wird. Wir können daher die Unfreiheit einer Schwingung uns so vorstellen, dass diese Schwingung erzwungen ist durch ihr Verhältniss zu einem System, dessen Grenzen willkürlich bestimmt werden, selbst wenn dieses System zum Theil die Periode der Kraft, welche auf dasselbe wirkt, bestimmt. Nimmt man als schwingende Substanz nach einem weiter gehenden Gesichtspunkte beide Systeme zusammen, so ist die in Frage stehende Schwingung als frei anzusehen. Ein Beispiel mag dieses deutlicher machen. Eine in der Luft schwingende Stimmgabel ist ein Theil eines zusammengesetzten Systems, welches die Luft und die Gabel selbst enthält; in Bezug auf dieses System ist die Schwingung frei. Obgleich die Gabel durch die Reaction der Luft beeinflusst wird, so ist doch die Grösse eines solchen Einflusses klein. Für praktische Zwecke ist es zweckmässig, die Bewegung der Stimmgabel als gegeben

anzusehen und die der Luft als unfrei. Es wird kein Fehler begangen, wenn man die thatsächliche Bewegung der Gabel (d. i. die Bewegung unter Einfluss der umgebenden Dinge) als Grundlage der Rechnung nimmt. Der besondere Vortheil dieser Art von Auffassung wird indess erst dann offenbar, wenn nur eine angenäherte Lösung erforderlich ist. Es kann in einem solchen Falle genügen, für die thatsächliche Bewegung die zu setzen, welche die Gabel bei Abwesenheit der Luft ausführen würde, und hernach erst, wenn nöthig, eine Correction einzuführen.

52. Illustrationen zu den Principien dieses Capitels können aus allen Theilen der Akustik beigebracht werden. Wir wollen hier nur wenige Anwendungen geben, welche wegen ihrer Einfachheit und Wichtigkeit einen der ersten Plätze einnehmen.

Eine Saite oder ein Draht ACB ist zwischen zwei festen Punkten A und B ausgespannt. Der Mittelpunkt der Saite

Fig. 9.



trägt eine Masse M, welche so beträchtlich angenommen wird, dass die Masse der Saite selbst vernachlässigt werden kann. Wenn M aus seiner Gleichgewichtslage herausgezogen und dann sich selbst überlassen bleibt, so macht M längs der Linie CM Schwingungen, welche den zu untersuchenden Gegenstand bilden. AC sei $= CB = a$. $CM = x$. Die Spannung der Saite in der Gleichgewichtslage hängt von der Grösse der spannenden Kraft ab, welcher dieselbe ausgesetzt war. In

jeder anderen Lage ist die Spannung grösser; wir wollen uns indess auf den Fall von so kleinen Schwingungen beschränken, dass die Zunahme der Spannung ein zu vernachlässigender Bruchtheil der ganzen ist. Bei dieser Bedingung kann die Spannung als constant angesehen werden. Wir bezeichnen sie mit T.

Die kinetische Energie ist also $= \frac{1}{2} M\dot{x}^2$, und die potentielle Energie $= 2\,T\left\{\sqrt{a^2 + x^2} - a\right\} = T\frac{x^2}{a}$ angenähert.

Die Bewegungsgleichung (welche auch ganz unabhängig von dem Begriff der Energie abgeleitet werden könnte) ist demnach:

$$M\ddot{x} + 2\,T\frac{x}{a} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

aus welcher wir schliessen, dass die Masse M harmonische Schwingungen ausführt, deren Periode ist:

$$\tau = 2\pi : \sqrt{\frac{2\,T}{aM}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Die Amplitude und Phase hängen natürlich von den Anfangsbedingungen ab; sie sind, so weit es die Differentialgleichung betrifft, willkürlich.

Gleichung (2) giebt an, in welcher Weise τ sich mit jeder der unabhängigen Grössen T, M und a ändert; es konnte die Art dieser Abhängigkeit auch aus der blossen Betrachtung der Dimensionen (im technischen Sinne) der in Frage stehenden Grössen abgeleitet werden. Die Beweisführung aus den Dimensionen ist so oft von Wichtigkeit in der Akustik, dass es gut sein wird, dieses erste Beispiel dafür des Längern zu betrachten.

Zunächst müssen wir uns davon überzeugt haben, dass von all den Grössen, von denen τ abhängen kann, die einzigen, welche eine Beziehung zu den drei Fundamentaleinheiten — der Länge, Zeit und Masse — haben, a, M und T sind. Die Lösung des Problems möge geschrieben werden:

$$\tau = f\,(a, M, T) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Die Form dieser Gleichung muss stets dieselbe sein, welches auch die Fundamentaleinheiten sein mögen, in denen die vier Grössen numerisch ausgedrückt werden; eine Behauptung, deren Richtigkeit sich von selbst ergiebt, wenn man bedenkt, dass bei der Ableitung dieser Gleichung keine Voraussetzungen über die Grösse dieser Einheiten gemacht sind. Nun enthält unter allen Grössen, von welchen f abhängt, nur T die Zeit; da die Dimensionen von T sind (Masse). (Länge). (Zeit)$^{-2}$, so folgt, dass, wenn a und M constant sind, $\tau \propto T^{-1/2}$ sein muss, denn sonst würde ein Wechsel in der Zeit nothwendiger Weise die Gleichung (3) stören. Wenn dieses zugegeben wird, ist es weiter leicht einzusehen, dass wir, damit (3) unabhängig von der Wahl der Längeneinheit ist, haben müssen: $\tau \propto T^{-1/2} \,.\, a^{1/2}$, wenn M constant ist; schliesslich, um auch Unabhängigkeit von der Masseneinheit zu haben, muss sein:

$$\tau \propto T^{-1/2} \,.\, M^{1/2} \,.\, a^{1/2}.$$

Um diese Indices zu bestimmen, können wir auch folgendermaassen vorgehen. Wir nehmen an:

$$\tau \propto T^{x} \,.\, M^{y} \,.\, a^{z};$$

dann erhalten wir, indem wir die einzelnen Dimensionen nach Zeit, Raum und Masse beachten,

$$1 = -2x,\ 0 = x + z,\ 0 = x + y,$$

und hieraus wie oben:

$$x = -\frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}.$$

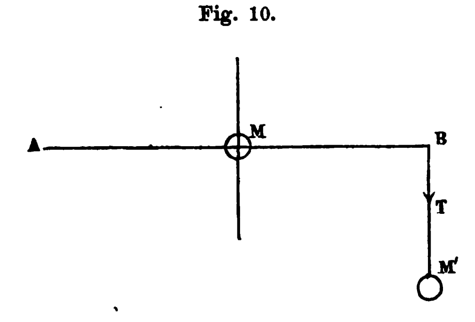
Es darf sich aber kein Irrthum einschleichen über das, was dieses Argument wirklich beweist, und das, was es nicht beweist. Wir haben angenommen, dass es eine bestimmte Schwingungsdauer giebt, welche mit Rücksicht auf ihre Abhängigkeit von Raum, Zeit und Masse nur von den oben erwähnten Grössen abhängt. Wir haben z. B. nicht bewiesen, dass τ unabhängig von der Amplitude der Schwingung ist. Dieses ist, soweit es überhaupt richtig ist, eine Folge von der linearen Form der angenäherten Differentialgleichung.

Wegen der Nothwendigkeit der vollständigen Aufzählung aller Grössen, von denen das gesuchte Resultat abhängen kann,

ist die Methode der Dimensionenzählung etwas gefährlich; wenn sie aber mit grosser Sorgfalt angewandt wird, so ist sie unzweifelhaft von grosser Tragweite und hohem Werth.

53. Die Lösung des vorliegenden Problems kann als Grundlage einer Methode zur absoluten Messung der Höhe eines Tones benutzt werden. Das Haupthinderniss für die Genauigkeit würde wahrscheinlich die Schwierigkeit sein, *M* im Vergleich zur Masse des Drahtes gross genug zu machen, ohne zu gleicher Zeit den Klang zu sehr in der musikalischen Scala zu erniedrigen.

Fig. 10.



Der Draht kann gespannt sein durch ein Gewicht M', welches an seinem Ende mittelst eines Steges oder einer Rolle in B befestigt ist. Die Schwingungsdauer kann berechnet werden aus:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{aM}{2gM'}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

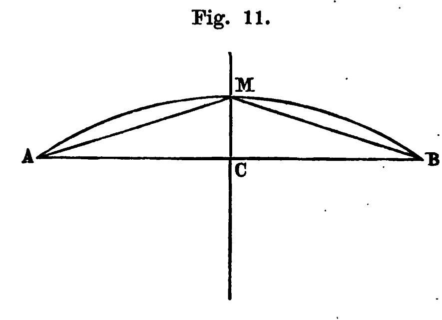
Das Verhältniss von $M' : M$ wird durch die Wage gegeben. Wird a in Meter gemessen und $g = 9.8$ genommen, so ist die Schwingungsdauer in Secunden ausgedrückt.

54. Bei den gewöhnlichen musikalischen Instrumenten ist das Gewicht, anstatt im Mittelpunkte concentrirt zu sein, gleichförmig über die Länge der Saite vertheilt. Nichtsdestoweniger giebt das vorliegende Problem doch in etwa eine Idee von der tiefsten Schwingung einer solchen Saite. Ver-

gleichen wir dazu die beiden Fälle genauer, indem wir die Amplituden der beiden Schwingungen im Mittelpunkte als gleich gross annehmen.

Wenn die gleichförmige Saite gerade ist, so haben in dem Augenblicke, wo die Gleichgewichtslage passirt wird, die einzelnen Theile verschiedene Geschwindigkeiten, welche von jedem der beiden Enden nach dem Mittelpunkte hin zunehmen. Nehmen wir für die ganze Masse die Geschwindigkeit des Mittelpunktes, so wird die kinetische Energie offenbar um ein Bedeutendes zu gross genommen. Anderenseits ist in dem Augenblicke der grössten Excursion die gleichförmige Saite mehr gespannt als eine Saite, welche die geraden Linien AM und MB bildete; demnach wird die potentielle Energie vermindert, wenn wir eine derartig gespannte Saite wie die letztere für die wirkliche Form setzen. Die Concentrirung der Masse in den Mittelpunkt allein erhöht also die kinetische Energie, wenn $x = 0$ ist, und vermindert die potentielle Energie, wenn $\dot{x} = 0$; daher verlängert diese Concentrirung nach den in §. 44 auseinander gesetzten Principien die Schwingungsdauer. Die Periode ist für eine Saite also kleiner, wie die aus den Formeln des letzten Abschnitts berechnete, vorausgesetzt, dass M die Masse der Saite bedeuten soll. Wir werden später sehen, dass wir, um ein genaues Resultat zu haben, anstatt M einfach $\frac{4}{\pi^2}M$ nehmen müssen. Von dem Factor $\frac{4}{\pi^2}$ rührt der bei weitem grösste Theil — d. i. $\frac{1}{2}$ — von dem Unterschied der kinetischen Energien her.

Fig. 11.

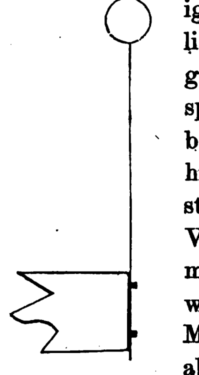


55. Als ein zweites Beispiel eines Systems, das praktisch nur einen Grad von Freiheit besitzt, wollen wir die Schwin-

gung einer Feder nehmen, deren eines Ende in einen Schraubstock eingespannt oder auf andere Weise festgehalten wird, während das andere Ende eine schwere Masse trägt.

Genau genommen hat dieses System ebenso wie das letzt betrachtete eine unendliche Anzahl von unter einander unabhängigen Schwingungsarten; wenn indess die Masse der Saite verhältnissmässig klein wird, so überwiegt die Schwingung, welche nahezu unabhängig von der Trägheit derselben ist, so bedeutend, dass die anderen ignorirt werden können. Wir können schliesslich auf Grund dieser Auffassung so weit gehen, dass wir die Feder nur als den Ursprung einer Kraft nehmen, welche die daran befestigte Masse nach der Gleichgewichtslage hintreibt, und zwar dabei innerhalb einer bestimmten Grenze einfach proportional der Verschiebung ist. Das Resultat ist eine harmonische Schwingung mit einer Periode, welche von der Steifheit der Feder und der Masse des an letzterer befestigten Körpers abhängt.

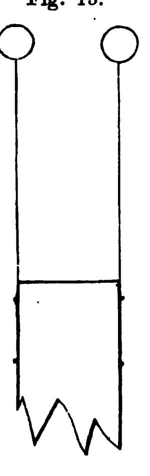
Fig. 12.



56. In Folge der Oscillation des Schwerpunktes ist ein andauerndes Streben vorhanden, den Befestigungspunkten Bewegung mitzutheilen; die letzteren müssen daher, um diesem entsprechend zu widerstehen, sehr fest und massiv sein. Um dieser Unbequemlichkeit zu entgehen, kann man zwei genau gleiche Federn und Gewichte in symmetrischer Weise an denselben Schraubstock befestigen. Wenn die zwei Gewichte Schwingungen von gleicher Amplitude ausführen in solcher Weise, dass die Bewegungen der beiden stets einander entgegengesetzt sind oder dass dieselben, wie man sich anders ausdrücken kann, eine Phasendifferenz von einer halben Periode haben, dann bleibt der Schwerpunkt des ganzen Systems in Ruhe, und deshalb ist kein Bestreben vorhanden, den Schraubstock in Bewegung zu setzen. Wir werden in einem der späteren Capitel sehen, dass dieses besondere Phasenver-

hältniss sich, in welcher Weise auch anfänglich die Federn in Bewegung gesetzt sind, rasch von selbst herstellt. In der That wird jeder Theil der Bewegung, welcher der Bedingung, den Schwerpunkt in Ruhe zu lassen, nicht genügt, durch Dämpfung bald ausgelöscht, wenn nicht die Träger des Systems wirklich mehr wie gewöhnlich fest sind.

Fig. 13.



57. Wie wir in unserm ersten Beispiel eine rohe Illustration der fundamentalen Schwingungsform einer tönenden Saite fanden, so können wir hier mit der Feder und dem angehängten Gewicht einen gleichförmigen Streifen oder Stange, aus elastischer Substanz bestehend, vergleichen, dessen eines Ende unbedingt fest ist, wie zum Beispiel die Zunge eines Pfeifeninstrumentes. Es ist natürlich richtig, dass die Masse nicht an einem Ende concentrirt, sondern über die ganze Länge vertheilt ist. Jedoch ist in Anbetracht der Kleinheit der Bewegung nahe am Befestigungspunkt die Trägheit dieses Theiles der Stange von geringem Einfluss. Wir folgern daraus, dass die fundamentale Schwingungsform einer gleichförmigen Stange in ihrem Charakter nicht viel von der eben betrachteten abweichen kann. Natürlich sind, wenn es sich um Zwecke handelt, die eine genaue Rechnung erfordern, die beiden Systeme hinreichend von einander unterschieden; wo es dagegen nur darauf ankommt, klare Vorstellungen zu haben, kann man oft Genauigkeit gegen Einfachheit austauschen.

In demselben Sinne können wir die Verbindung von zwei Federn und Gewichten, wie sie in Fig. 13 gezeichnet ist, als Darstellung einer Stimmgabel auffassen. Dieses Instrument, welches in den letzten Jahren viele Verbesserungen erfahren hat, ist jedem Forscher in der Akustik unentbehrlich. Im Grossen und für rohe Zwecke kann man dasselbe herstellen, wenn man mit der Mitte einer Stahlstange ein anderes Stück

Stahl quer gegen diese Stange zusammenschweisst, so dass ein T-Stück gebildet wird, und dann die Stange in die Form eines Hufeisens biegt. In den Stiel müsste dann noch zum Befestigen eine Schraube eingeschnitten werden. Für die besseren Sorten von Stimmgabeln ist es indess zweckmässig, das Ganze aus einem Stück Stahl zu formen. Es wird zunächst von dem einen Ende bis zur Mitte einer Stange Stahl ein Einschnitt gemacht, die beiden so gebildeten Theile aus einander gebogen, um die Zinken der Gabel zu bilden, und das Ganze mit Hammer und Feile bearbeitet, bis es die gewünschte Form hat. Die beiden Zinken müssen in Bezug auf eine Ebene, welche durch die Axe des Stieles geht, genau symmetrisch sein, damit während der Schwingung der Schwerpunkt unverändert bleibt — unverändert, das heisst, in der Richtung, in welcher die Zinken schwingen.

Das Abstimmen wird folgendermaassen gemacht. Um den Klang höher zu machen, muss die entsprechende Trägheit des Systems geringer gemacht werden. Dies wird durch Abfeilen der Enden der Zinken erreicht, indem man entweder die Dicke derselben verringert oder sie wirklich verkürzt. Anderenseits kann man, um die Höhe zu erniedrigen, von den Zinken etwas nahe an der Biegung wegnehmen; hierdurch wird die Federkraft verringert, während die Trägheit, wenigstens so weit es in der Praxis in Betracht kommt, ungeändert bleibt. Man kann auch umgekehrt, um die Höhe zu vermindern, die Trägheit vergrössern, indem man die Enden der Zinken mit Wachs oder anderen Substanzen beschwert. Diese Methode ist wohl für vorübergehende Zwecke vorzuziehen. Grosse Gabeln sind manchmal mit beweglichen Gewichten versehen, welche längs der Zinken heruntergleiten und in jeder beliebigen Stellung durch Schrauben befestigt werden können. Wenn diese Gewichte sich den Enden nähern (wo die Geschwindigkeit am grössten ist), wächst die entsprechende Trägheit des Systems. Auf diese Weise kann man mit einer Gabel eine beträchtliche Reihe von verschieden hohen Klängen erhalten. Die Anzahl der Schwingungen in der Secunde kann für jede Stellung der Gewichte auf den Zinken bemerkt werden.

Die Beziehung zwischen der Grösse und der Tonhöhe der Stimmgabel ist bemerkenswerth einfach. In einem spätern Capitel werden wir beweisen, dass die Schwingungsdauer, vorausgesetzt, dass das Material dasselbe und die Gestalt constant bleibt, sich direct wie die linearen Dimensionen ändert. Wenn daher die linearen Dimensionen einer Stimmgabel verdoppelt werden, so wird der Klang um eine Octave niedriger.

58. Der Klang einer Stimmgabel ist nahezu ein reiner Ton. Unmittelbar nach dem Anstreichen einer Gabel kann man allerdings hohe Töne hören, welche den Schwingungsarten entsprechen, deren Natur wir später noch betrachten; indessen verschwinden diese rasch, und selbst wenn dieselben noch vorhanden sind, vermischen sie sich nicht mit dem eigentlichen Tone der Gabel, theils wegen ihrer sehr hohen Höhe, theils weil dieselbe nicht zur harmonischen Reihe des eigentlichen Tones gehören. Bei den von Helmholtz untersuchten Gabeln hatte der erste dieser Obertöne eine Schwingungszahl, die 5,8 bis 6,6 Mal so gross wie die des eigentlichen Grundtones war.

Stimmgabeln werden jetzt allgemein mit Resonanzkästen versehen, die (wegen der später zu entwickelnden Gründe) eine grosse Steigerung des Umfanges und der Reinheit des Klanges bewirken. Um die Gabeln in Schwingung zu versetzen, streicht man dieselben in der Richtung der Schwingungen mit einem mit Colophonium versehenen Violin- oder Cellobogen an. Der so hervorgerufene Klang dauert eine Minute und auch wohl länger.

59. Als Maassstäbe für die Tonhöhe sind Stimmgabeln unersetzlich. Die Höhe der Orgelpfeifen ändert sich mit der Temperatur und mit dem Drucke des Windes; die der Saiten mit der Spannung, welche nie für längere Zeit constant gehalten werden kann. Eine rein gehaltene Stimmgabel, die nicht plötzlichen Aenderungen der Temperatur oder Magnetisirung ausgesetzt wird, behält dagegen ihre Höhe mit grosser Zuverlässigkeit.

Mittelst der Schwebungen kann man von einer Normalstimmgabel mit grosser Genauigkeit eine Copie nehmen. Die Anzahl der in einer Secunde gehörten Schwebungen ist der Unterschied der Schwingungszahlen der beiden Töne, welche jene hervorrufen; kann man z. B. die Schwebungen so langsam machen, dass jede nur eine halbe Minute einnimmt, so differiren die Schwingungszahlen nur um 1,30stel einer Schwingung. Eine noch grössere Genauigkeit kann mit Lissajous' optischer Methode erreicht werden.

Da sehr langsame Schwebungen schwer zu beobachten sind in Folge der Ungewissheit, ob ein Fallen des Tones von einer Interferenz oder dem allmäligen Abnehmen der Schwingung herrührt, entwarf Scheibler einen etwas abgeänderten Plan. Er nahm eine Gabel, deren Höhe etwas von der Normalgabel abwich — ob sie höher oder niedriger ist, ist nicht wesentlich, wir wollen annehmen niedriger. Es wurde dann die Anzahl von Schwebungen gezählt, die eintraten, wenn beide zusammenklangen. Ungefähr vier Schwebungen in der Secunde ist das zweckmässigste; diese mögen etwa eine Minute lang gezählt werden. Die abzustimmende Gabel wird dann etwas höher wie die Hülfsgabel gemacht, und so abgestimmt, dass sie mit dieser genau dieselbe Anzahl von Schwebungen wie die Normalgabel giebt. Auf diese Weise versichert man sich einer so genauen Copie wie nur möglich. Um das Zählen der Schwebungen zu erleichtern benutzte Scheibler Pendel, deren Schwingungsdauern abgeglichen werden konnten.

60. Die Methode der Schwebungen wurde von Scheibler weiter dazu benutzt, die absolute Höhe seiner Normalgabeln zu bestimmen. Zwei Gabeln wurden auf eine Octave abgestimmt, eine Anzahl anderer wurde in das Intervall beider in so kleinen Zwischenräumen eingeschaltet, dass jede Gabel mit ihren unmittelbaren Nachbaren in der Reihe eine Anzahl von Schwebungen gab, welche leicht gezählt werden konnten. Der Unterschied der Schwingungszahlen je zwei auf einander folgender Gabeln wurde mit der grösstmöglichsten Aufmerksamkeit beobachtet.

Ihre Summe, welche der Unterschied der Schwingungszahlen für das Intervall der Octave ist, war gleich der Schwingungszahl der Gabel, welche am Ende der Reihe den Ausgangspunkt bildete. Die Tonhöhe der anderen Gabeln konnte hieraus abgeleitet werden.

Wenn zwei auf einander folgende Gabeln in der Secunde vier Schwebungen geben, so müssen im Ganzen 65 Gabeln vorhanden sein, um das Intervall zwischen c' (256) und c'' (512) auszufüllen. Aus diesem Grunde ist die Methode mühsam; indessen ist sie wahrscheinlich die genaueste für die erste Bestimmung einer Höhe, weil sie nur solchen Irrthümern ausgesetzt ist, die durch Sorgfalt und Wiederholung ausgemerzt werden können. Es mag noch bemerkt werden, dass das Wesentliche der Methode in der Messung der Differenzen von Schwingungszahlen zweier Klänge besteht, für welche das Verhältniss der Schwingungszahlen unabhängig hiervon bekannt ist. Wenn wir daher der Genauigkeit des letztern stets ebenso sicher sind, kann für die Octave das Intervall der Quinte, Quarte oder selbst der grossen Terz gesetzt werden, woraus der Vortheil erwächst, dass die Anzahl der nöthigen Interpolationen verringert wird. Es ist wahrscheinlich, dass unter zu Hülfe Ziehung optischer Methoden diese Versetzung mit Vortheil angewandt werden kann, da die entsprechenden Lissajous'schen Figuren leicht erkannt werden und ihre Stetigkeit ein sehr strenger Beweisgrund für die Genauigkeit ist, mit welcher das gesuchte Verhältniss erreicht ist.

Die Schwingungszahlen von grossen Stimmgabeln können auch dadurch bestimmt werden, dass man dieselben eine harmonische Curve ziehen lässt auf berusstem Papier, welches zweckmässiger Weise über eine sich drehende Trommel gelegt ist. Die Anzahl der in einer Secunde gezogenen Wellen giebt die Schwingungszahl an.

In manchen Fällen liefert auch die Benutzung von intermittirender Beleuchtung, wie dieselbe in §. 42 beschrieben wurde, eine zweckmässige Methode zur Bestimmung einer unbekannten Schwingungszahl.

61. Eine Reihe von Gabeln, welche in kleinen Intervallen sich in eine Octave einordnen, ist ein sehr brauchbares Hülfsmittel zur Bestimmung der Schwingungszahl irgend eines musikalischen Klanges — sie wird Scheibler's Tonometer genannt. Dasselbe kann gleichfalls dazu benutzt werden, einen Klang auf eine gewünschte Höhe abzustimmen. In jedem dieser Fälle wird die Schwingungszahl eines Klanges durch die Anzahl der Schwebungen gegeben, welche dieser mit den Gabeln giebt, die ihm (nach jeder Seite hin) in der Höhe am nächsten kommen.

Um Klaviere oder Orgeln zu stimmen, kann man einen Satz von zwölf Gabeln benutzen, welche die Klänge der chromatischen Scala nach der gleichschwebenden Temperatur oder irgend einem andern verlangten System geben. Die entsprechenden Klänge werden bis zum Einklang, die anderen sodann durch Octaven gestimmt. Es ist indessen besser, die Gabeln so anzufertigen, dass sie in der Secunde vier Schwingungen weniger wie eben angenommen geben. Jeder Klang wird dann ein wenig höher als die entsprechende Gabel gestimmt, bis dieselben beim Zusammenklingen genau vier Schwebungen in der Secunde geben. Es ist dabei aber zu bemerken, dass die Addition (oder Subtraction) einer constanten Zahl zu den Schwingungszahlen nicht dasselbe wie eine blosse Verschiebung der Scala in der absoluten Höhe ist.

Die Klavierstimmer nehmen in ihrer gewöhnlichen Praxis als Ausgangspunkt das a' einer Gabel und bestimmen die anderen Klänge durch Abschätzen nach Quinten. Man muss sich erinnern, dass zwölf richtige Quinten etwas mehr als sieben Octaven sind; daher ist in dem temperirten System jede Quinte ein wenig zu klein. Der Stimmer geht von a' nach oben in auf einander folgenden Quinten, indem er ungefähr nach je zwei Schritten um eine Octave heruntergeht, um nahezu in demselben Theile der Scala zu bleiben. Zwölf Quinten müssen ihn wieder nach a zurückbringen. Ist dies nicht der Fall, so muss das bis dahin Abgestimmte ausgeglichen werden, bis alle zwölf Quinten um denselben, wenigstens so nahe wie dieses abgeschätzt werden kann, kleinen Betrag zu klein sind.

Der unvermeidliche Fehler ist dann gleichmässig vertheilt und so wenig wie möglich merkbar gemacht. Die Octaven werden natürlich alle richtig gestimmt. Die folgenden Zahlen geben die Reihenfolge an, in welcher die Klänge gestimmt werden können:

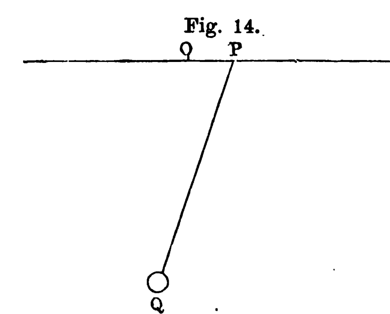
ais	*h*	*c'*	*cis*	*d'*	*dis*	*e'*	*f'*	*fis*	*g'*	*gis*	*a'*	*ais*	*h'*	*c''*	*cis*	*d''*	*dis*	*e''*
13	5	16	8	19	11	3	14	6	17	9	1	12	4	15	7	18	10	2

In der Praxis wird die gleichschwebende Temperatur nur annähernd erreicht; indess ist dieses vermuthlich nicht von grosser Wichtigkeit, wenn man bedenkt, dass das angestrebte System selbst an und für sich keineswegs vollkommen ist.

Violinen und die anderen Instrumente derselben Art werden mittelst richtiger Quinten von a' aus gestimmt.

62. Als Beispiel einer erzwungenen Schwingung wollen wir ein Pendel betrachten, dessen Aufhängepunkt einer kleinen horizontalen harmonischen Bewegung ausgesetzt ist. Q ist das mittelst eines feinen Drahtes an den beweglichen Punkt P angehängte Gewicht. $OP = x_0$, $PQ = l$; x sei die horizontale Coordinate von Q. Da die Schwingungen als klein angenommen sind, kann die verticale Bewegung vernachlässigt und die Spannung des Drahtes gleich dem Gewichte von Q gesetzt werden. Daher haben wir für die horizontale Bewegung:

Fig. 14.

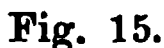


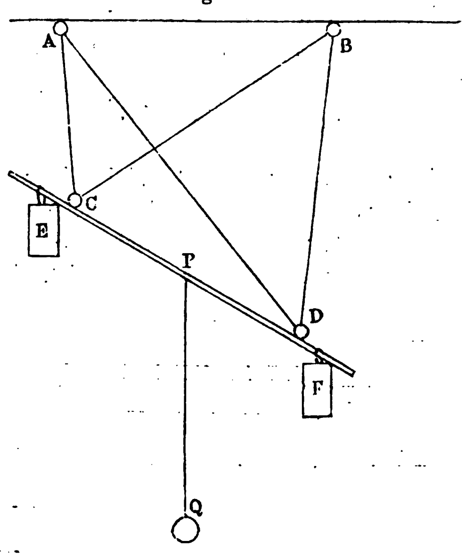
$$\ddot{x} + \varkappa \dot{x} + \frac{g}{l}(x - x_0) = 0.$$

Nun ist $x_0 \propto \cos pt$, so dass, wenn wir $g : l = n^2$ setzen, unsere Gleichung die schon behandelte Form annimmt:

$$\ddot{x} + \varkappa \dot{x} + n^2 x = E \cos pt.$$

Ist p gleich n, so wird die Bewegung nur durch die Reibung begrenzt. Die angenommene horizontale harmonische Bewegung von P kann hergestellt werden mittelst eines zweiten Pendels von massiver Construction, das P bei seiner Bewegung mit sich zieht. Eine hinreichend gute Anordnung ist in der Figur zu sehen. A und B sind eiserne Ringe, die in


Fig. 15.

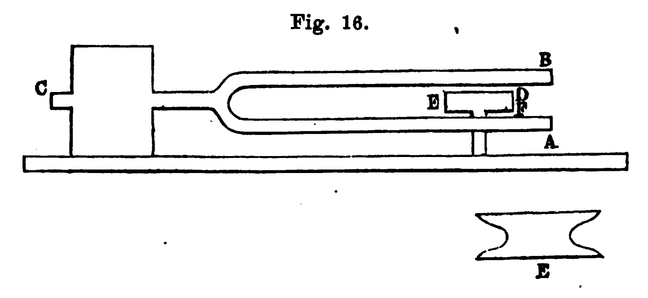


einen Balken oder einen andern festen Träger eingeschraubt werden; C und D sind ähnliche Ringe, die befestigt sind an einer festen Stange, welche nahe an ihrem Ende zwei gleich schwere Gewichte trägt. Die Stange wird horizontal und rechtwinklig zum Balken durch eine Schnur gehalten, welche in der gezeichneten Weise durch die vier Ringe geht. Wenn das Pendel in Schwingung versetzt wird, beschreibt ein Punkt der Stange, der mitten zwischen C und D liegt, eine harmonische Bewegung in einer Richtung parallel CD; dieser Punkt kann als Befestigungspunkt eines zweiten Pendels PQ genommen werden. Sind die Gewichte E und F im Verhältniss zu Q sehr gross, so schwingt das obere Pendel sehr nahe

mit seiner eigenen Periode und ertheilt Q eine erzwungene Schwingung von derselben Periode. Q wird, wenn die Länge PQ so gewählt ist, dass die natürlichen Perioden der beiden Pendel nahezu dieselben sind, in eine heftige Bewegung versetzt, selbst wenn die Schwingung von P nur eine unbeträchtliche Länge hat. In diesem Falle ist die Phasendifferenz ungefähr eine viertel Periode, um welchen Betrag das obere Pendel voraus ist. Sind die zwei Perioden sehr verschieden von einander, so stimmen die Schwingungen in ihrer Phase entweder ganz überein oder sind gerade entgegengesetzt nach den Gleichungen (4) und (5) des §. 46.

63. Ein ausgezeichnetes Beispiel einer erzwungenen Schwingung liefert eine Stimmgabel, welche unter dem Einflusse eines intermittirenden elektrischen Stromes schwingt, dessen Periode nahezu gleich ihrer eigenen ist. ACB stellt die

Fig. 16.



Gabel vor; E ein kleiner Elektromagnet, der dadurch gebildet wird, dass man isolirten Draht auf einen Eisenkern von der in E gezeichneten Form (ähnlich der als „Siemen's Armatur" bekannten) aufwindet. Dieser Elektromagnet wird zwischen die Zinken der Gabel gestellt. Wenn ein intermittirender Strom durch den Draht geschickt wird, so wirkt eine periodische Kraft auf die Gabel. Diese Kraft kann nicht durch eine einfache Kreisfunction ausgedrückt werden; sie lässt sich indess nach dem Fourier'schen Satze in eine Reihe von solchen Functionen mit den Perioden τ, $\frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{3}\tau$ etc. entwickeln. Wenn

irgend eine von diesen, deren Amplitude nicht zu klein ausfällt, mit der Gabel nahezu isochron ist, wird die letztere zum Schwingen gebracht; andernfalls ist die Wirkung unbedeutend. In dem Folgenden wollen wir annehmen, dass es die ganze Periode τ ist, welche mit der der Nadel nahezu übereinstimmt; dem entsprechend nehmen wir an, dass die Reihe, welche die periodische Kraft ausdrückt, auf ihr erstes Glied reducirt ist.

Um das Maximum der Schwingung zu erreichen, muss die Gabel mittelst eines kleinen gleitenden Stückes Metall oder mittelst Wachs [1]) sorgfältig abgestimmt werden, bis ihre natürliche Periode (ohne Reibung) der der Kraft gleich ist. Dies wird am besten durch einen wirklichen Versuch erreicht. Wenn die gewünschte Gleichheit angenähert gewonnen ist und die Gabel sich in Bewegung setzen kann, haben die erzwungene und die complementäre freie Schwingung nahezu gleiche Amplituden und Schwingungszahlen; deshalb bringen sie am Anfang der Bewegung Schwebungen hervor (§. 48), deren Langsamkeit ein Maass für die Genauigkeit der Abstimmung ist. Erst nachdem die freie Schwingung Zeit zum Vergehen gefunden hat, nimmt die Bewegung ihren permanenten Charakter an. Die Schwingungen einer richtig construirten und aufgestellten Stimmgabel unterliegen einer sehr kleinen Dämpfung; in Folge dessen bewirkt eine sehr geringe Abweichung vom vollkommenen Isochronismus ein merkliches Sinken in der Intensität der Resonanz.

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung kann mit hinreichender Genauigkeit mit dem Ohre oder dem Auge beobachtet werden; die experimentelle Bestätigung der von der Theorie aufgestellten Beziehungen zwischen der Phase dieser Schwingung und der Phase der Kraft, welche die letztere hervorruft, erfordert dagegen eine etwas veränderte Anordnung.

---

[1]) Zu diesem Zwecke macht man zweckmässig das Wachs durch Zusammenschmelzen mit ein wenig Terpentin etwas weicher.

Zwei ähnliche Elektromagnete, die auf ähnliche Gabeln wirken und sich in demselben Stromkreis befinden, werden durch denselben intermittirenden Strom erregt. Es ist klar, dass unter solchen Umständen die Systeme in ähnliche Schwingungen versetzt werden, weil gleiche Kräfte auf sie wirken. Die Aehnlichkeit der Schwingungen erstreckt sich sowohl auf die Phase wie auf die Amplitude. Wir wollen nun annehmen, dass die Schwingungen in auf einander senkrechten Richtungen geschehen und mit Hülfe von einer der Lissajous'schen Methoden optisch combinirt werden. Die dann resultirende Linie ist nothwendiger Weise eine gerade Linie. Gehen wir von dem Fall aus, in welchem die Amplituden ihr Maximum haben, das ist dann, wenn die natürlichen Perioden der beiden Gabeln dieselben wie die der Kraft sind; es werde nun eine der Gabeln etwas aus der Stimmung gebracht. Man muss hierbei eingedenk bleiben, dass die beiden Gabeln, welches auch die natürlichen Perioden sein mögen, stets im vollkommenen Einklange mit der Kraft und daher auch unter einander schwingen. Die Hauptwirkung der Differenz der natürlichen Perioden ist die, dass der Synchronismus der Phasen zerstört wird. Die gerade Linie, welche vorher die zusammengesetzte Schwingung darstellte, geht in eine Ellipse über, und diese bleibt vollkommen stetig, so lange wie die Gabeln nicht berührt werden. Ursprünglich sind beide Gabeln eine viertel Schwingung hinter der Kraft. Wenn die Höhe der einen Gabel langsam erniedrigt wird, fällt die Phase derselben noch mehr hinter die der Kraft; zu gleicher Zeit nimmt auch ihre Amplitude ab. Die Phasendifferenz zwischen den beiden Gabeln sei ε'; das Verhältniss der Schwingungsamplituden $a : a_0$. Dann ist nach Gleichung (6) des §. 46

$$a = a_0 \cos \varepsilon'.$$

Die folgende Tabelle giebt die zusammengehörigen Werthe von $a : a_0$ und ε'.

$a : a_0$	ε'
1,0	0
0,9	$25^0\ 50'$
0,8	$36^0\ 52'$
0,7	$45^0\ 34'$
0,6	$53^0\ \ 7'$
0,5	60^0
0,4	$66^0\ 25'$
0,3	$72^0\ 32'$
0,2	$78^0\ 27'$
0,1	$84^0\ 15'$ [1]

Es geht aus dieser Tabelle hervor, dass eine beträchtliche Phasenänderung in jeder der beiden Richtungen erreicht werden kann, ohne eine wesentliche Verringerung der Amplitude. Wenn eine Gabel in ihrem Maximum schwingt, kann man die Phase der anderen von ihr nach jeder Seite hin um mehr als 60^0 abweichen lassen, ohne mehr wie die Hälfte an der Amplitude der letzteren Gabel zu verlieren, oder um mehr wie 45^0 ohne mehr wie die Hälfte der Energie der letztern einzubüssen. Indem wir die eine Gabel schwingen lassen um 45^0 vor, die andere um 45^0 hinter der Phase, welche dem Falle der grössten Resonanz entspricht, erhalten wir eine Phasendifferenz von 90^0 in Verbindung mit gleichen Amplituden. Lissajous' Figur wird dann ein Kreis.

64. Der intermittirende Strom wird am besten durch einen von Helmholtz erfundenen Stimmgabel-Unterbrecher erhalten. Dieser kann aus einer Gabel und einem wie vorher aufgestellten Elektromagnet gebildet werden. Von den Dräh-

---

[1] Tonempfindungen, S. 190.

ten des Magneten ist das eine Ende mit der Batterie, das zweite mit einem Quecksilbernäpfchen verbunden. Der andere Pol der Batterie ist mit einem zweiten Quecksilbernäpfchen in Verbindung gesetzt. Ein U-förmiger Reiter von isolirtem Draht wird von der untern Zinke gerade über die Näpfchen gehalten, und zwar in solcher Höhe, dass während der Schwingung der Strom abwechselnd durch das Eintauchen und Austauchen des einen Endes dieses Reiters in die beiden Quecksilbernäpfchen geschlossen und geöffnet wird. Das andere Ende kann dauernd eintauchen. Durch die so erhaltene periodische Kraft wird die Wirkung der Reibung ausgeglichen, die Schwingungen der Gabel werden daher permanent aufrecht erhalten. Um eine andere Gabel in erzwungene Schwingung zu versetzen, kann der mit dieser verbundene Elektromagnet entweder in denselben erregenden Strom oder in einen zweiten eingeschaltet werden, dessen periodische Unterbrechung durch einen zweiten in Quecksilbernäpfchen tauchenden Reiter bewirkt wird [1]).

Der *modus operandi* dieser Art von selbst wirkender Instrumente wird oft nicht ganz richtig verstanden. Wenn die auf die Gabel wirkende Kraft nur von der Stellung jener abhinge — davon, ob der Strom geschlossen oder geöffnet ist —, so würde die bei dem Durchgange durch eine Lage ge-

---

[1]) Ich habe verschiedene Unterbrecher nach dem obigen Plane hergestellt, bei welchen alle Theile in meinem kleinen Heimathsorte verfertigt wurden. Die Gabeln wurden vom Grobschmied des Dorfes gemacht. Die Näpfchen bestanden aus eisernen Fingerhüten, welche auf das eine Ende eines Kupferstreifens aufgelöthet sind; das andere Ende ist ans Tragbrett des Instruments angeschraubt. Eine Vorrichtung, die Höhe der Quecksilberoberfläche zu verändern, ist nothwendig. Bei Helmholtz's Unterbrecher ist ein hufeisenförmiger Magnet gewählt, der die Gabel umgiebt; ich ziehe die genannte Anordnung vor, jedenfalls, wenn die Tonhöhe eine geringe ist. In manchen Fällen wird eine grössere bewegende Kraft erhalten durch einen Hufeisenmagneten, welcher auf eine Armatur von weichem Eisen wirkt, die an der untern Zinke senkrecht zu derselben angebracht ist. Ich habe gewöhnlich ein einfaches Smell'sches Element als ausreichende elektromotorische Kraft gefunden.

leistete Arbeit bei der Rückkehr wieder verbraucht, so dass nach einer vollständigen Periode nichts übrig wäre, wodurch die Wirkung der reibenden Kräfte compensirt werden könnte. Jede Erklärung, welche auf die Verzögerung des Stromes keine Rücksicht nimmt, schiesst weit am Ziele vorbei. Der Ursachen zur Verzögerung sind zwei vorhanden: unregelmässiger Contact und Selbstinduction. Der elektrische Contact ist im ersten Moment, wenn die Spitze des Reiters das Quecksilber berührt, unvollkommen, wahrscheinlich wegen der anhängenden Luft. Andererseits wird beim Verlassen des Quecksilbers der Contact verlängert durch die Adhäsion der Flüssigkeit in dem Näpfchen an den amalgamirten Draht. Aus beiden Gründen wird der Strom verzögert hinter dem, der nur der Stellung der Gabel allein entsprechen würde. Selbst wenn aber der Widerstand des Stromkreises auch allein von der Lage der Gabel abhinge, würde der Strom doch noch durch seine Selbstinduction verzögert. Wie vollkommen der Contact auch sein mag, ein Strom von endlicher Stärke kann erst nach Verlauf einer endlichen Zeit entstehen, und zwar ist hier eine endliche Zeit noch mehr erforderlich als in dem Falle, wo durch einen gewöhnlichen Mechanismus eine endliche Geschwindigkeit einem trägen Körper ertheilt werden soll. Woher nun auch die Verzögerung kommen mag[1]), ihre Wirkung ist die, dass von der Gabel während der Zeit, wo der Reiter aus dem Quecksilber heraustaucht, mehr Arbeit gewonnen, als während des Eintauchens verloren wird; hieraus bleibt dann ein Gegengewicht gegen die Reibung übrig.

Wenn die magnetische Kraft nur von der Lage der Gabel abhängt, kann die Phase ihrer ersten harmonischen Componente als um 180⁰ von der der eigenen Schwingung der Gabel voraus angesehen werden. Die erwähnte Verzögerung ver-

---

1) Jede beliebige Verzögerung kann man in Ermangelung anderer Mittel dadurch erreichen, dass man den Reiter nicht an die Zinke selbst, sondern an das andere Ende einer leichten graden Feder befestigt, welche von der Zinke gehalten und so durch die Bewegung ihres Befestigungspunktes in eine erzwungene Schwingung versetzt wird.

mindert diesen Vorsprung. Wenn die Phasendifferenz auf 90° reducirt ist, so wirkt die Kraft auf die ihr günstigste Weise; dann wird die grösste Schwingung erreicht.

Es ist die Bemerkung von Wichtigkeit, dass (ausgenommen den eben erwähnten Fall) die wirkliche Tonhöhe des Unterbrechers innerhalb eines nicht unbedeutenden Bereichs von der natürlichen Tonhöhe der Gabel abweicht, gemäss dem in der Gleichung (5) des §. 46 ausgesprochenen Gesetzes; dabei ist ε in dem vorliegenden Falle eine vorgeschriebene Phasendifferenz, die von der Natur des Contactes und der Grösse der Selbstinduction abhängt. Wird der intermittirende Strom dazu gebraucht, eine zweite Gabel zu treiben, dann wird das Maximum der Schwingung erreicht, wenn die Schwingungszahl der Gabel zusammenfällt nicht mit der natürlichen, sondern mit der veränderten Schwingungszahl des Unterbrechers.

Die Abweichung eines Stimmgabelunterbrechers von der natürlichen Höhe der Gabel ist in Praxis sehr gering; indessen ist die Thatsache, dass eine solche Abweichung möglich ist, auf den ersten Blick sehr überraschend. Die Erklärung dieser Abweichung (bei einer kleinen Verzögerung des Stromes) ist die, dass während der Bewegungshälfte, während welcher die Zinken am weitesten von einander abstehen, der Elektromagnet in der Weise einwirkt, dass er der den Zinken eigenen, aus ihrer Steifigkeit herrührenden Kraftfähigkeit zu Hülfe kommt und so natürlicher Weise die Tonhöhe steigert. Welches auch das Phasenverhältniss sein mag, die Kraft des Magneten kann in zwei Theile getheilt werden, die respective der Geschwindigkeit und der Verrückung (oder Beschleunigung) proportional sind. Ausschliesslich von dem ersten Theile rührt die die Bewegung aufrechthaltende Wirkung der Kraft her, von dem zweiten die Aenderung der Tonhöhe.

65. Die allgemeinen Erscheinungen der Resonanz lassen sich in der Hauptsache, wenn sie auch nicht erschöpfend unter dem Gesichtspunkte eines Grades von Freiheit betrachtet werden können, auf dieselben allgemeinen Principien beziehen. Wenn eine erzwungene Schwingung in einem Theile eines

Systems erzeugt wird, so werden alle anderen Theile auch influencirt, indem eine Schwingung von derselben Periode erregt wird, deren Amplitude von der Beschaffenheit des als Ganzes betrachteten Systems abhängt. Häufig indess concentrirt sich das grösste Interesse auf die Schwingungen eines äussern Theiles, dessen Verbindung mit dem Reste des Systems nur locker ist. In solch einem Falle befindet sich der in Frage stehende Theil, vorausgesetzt, dass eine gewisse Grenze in der Amplitude nicht überschritten wird, in hohem Grade in der Lage eines Systems, das einen Grad von Freiheit besitzt und auf welches, unabhängig von der natürlichen Periode, eine Kraft einwirkt, welche als gegeben angesehen werden kann. Die Schwingung wird demgemäss von den Gesetzen beherrscht, welche wir schon aufgefunden haben. Bei einer angenäherten Gleichheit der Perioden — und hierauf wird der Name der Resonanz im Allgemeinen beschränkt — kann die Amplitude sehr beträchtlich sein, selbst wenn sie in anderen Fällen so klein ist, dass sie wenig in Betracht kommt; der bei dem Ausgleich der Perioden erforderliche Grad von Genauigkeit, um diese Wirkung hervorzubringen, hängt von dem Grade der Dämpfung ab, welcher das System unterworfen ist.

Unter den Körpern, die ohne eine sehr grosse Genauigkeit in der Abstimmung resoniren, sind gespannte Membranen zu erwähnen, dann Saiten in Verbindung mit Resonanzböden, wie beim Klavier und der Violine. Diese Körper werden, wenn der eigene Ton in ihrer Nachbarschaft ertönt, in einer sehr vernehmbaren Weise ebenfalls zum Schwingen gebracht. Der Versuch kann gemacht werden, indem man in ein Klavier die von irgend einer seiner Saiten angegebene Note hineinsingt, nachdem man zuerst den entsprechenden Dämpfer entfernt hat. Ebenso werden, wenn man eine der zu einer und derselben Tonstufe gehörenden Saiten mit dem Finger reisst (wie dieses bei der Saite einer Harfe geschieht), die anderen zu dieser Tonstufe gehörigen Saiten ebenfalls in Schwingung versetzt, wovon man sich direct überzeugen kann, wenn man die erste mit dem Finger anhält.

Die Erscheinung der Resonanz tritt indessen am überraschendsten hervor in Fällen, wo eine sehr genaue Gleichheit

der Perioden nothwendig ist, um die volle Wirkung zu erzielen. Stimmgabeln, welche auf Resonanzkästen befestigt sind, geben vorzügliche Beispiele dieser Art ab. Wenn das Unisono vollkommen ist, so wird die Schwingung der einen Gabel von einer andern auf Zimmerlänge aufgenommen; indess genügt auch die kleinste Abweichung in der Höhe, die Erscheinung meist unmerklich zu machen. Gewöhnlich werden Stimmgabeln von 256 Schwingungen in der Secunde zu diesem Zwecke gebraucht; man hat gefunden, dass eine Abweichung vom Unisono, welche nur eine Schwebung in einer Secunde giebt, die Resonanz beinahe aufhebt. Wenn die Gabeln gut abgestimmt und nahe bei einander sind, dann kann die Schwingung zwischen denselben verschiedene Male hin und her getragen werden, indem man sie abwechselnd durch Berührung mit dem Finger dämpft.

Illustrationen zu den machtvollen Wirkungen des Isochronismus müssen sich in der Erfahrung eines Jeden finden. Dieselben sind oft von grosser Bedeutung in Gebieten, die sehr verschieden von irgend einem Theil der Akustik sind. Es sind z. B. wenige Dinge für ein Schiff so gefährlich, als auf der See zu liegen unter dem Einfluss von Wellen, deren Periode nahezu dieselbe wie die des eigenen natürlichen Schwanken des Schiffes ist.

66. Die Auflösung der Gleichung für eine freie Schwingung, d. i.:

$$\ddot{u} + \varkappa \dot{u} + n^2 u = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

kann in eine andere Form gebracht werden, indem man die willkürlichen Integrationsconstanten A und α in Werthen der Anfangswerthe von u und $\dot{u}$ ausdrückt; die letzteren wollen wir u_0 und $\dot{u}_0$ nennen. Wir erhalten dann:

$$u = e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}\left\{\dot{u}_0 \frac{\sin n't}{n'} + u_0\left(\cos n't + \frac{\varkappa}{2n'}\sin n't\right)\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei:

$$n' = \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}\varkappa^2}.$$

Ist keine Reibung vorhanden, so ist $\varkappa = 0$ und dann:

$$u = \dot{u}_0 \frac{\sin nt}{n} + u_0 \cos nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Diese Resultate können dazu benutzt werden, die Lösung der vollständigen Gleichung:

$$\ddot{u} + \varkappa \dot{u} + m^2 u = U. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zu erhalten, worin U eine explicite Function der Zeit ist. Aus (2) sehen wir nämlich, dass die Wirkung einer zur Zeit t' ertheilten Geschwindigkeit zur Zeit t die folgende ist:

$$u = \delta \dot{u} \; e^{-\frac{1}{2}\varkappa(t-t')} \frac{\sin n'(t-t')}{n'}.$$

Die Wirkung von U ist: in der Zeit dt' eine Geschwindigkeit $U dt'$ hervorzurufen, deren Resultat mithin zu einer Zeit t sein wird:

$$u = \frac{1}{n'} U dt' e^{-\frac{1}{2}\varkappa(t-t')} \sin n' (t-t');$$

daher wird die Lösung von (4) sein:

$$u = \frac{1}{n'} \int^{t} e^{-\frac{1}{2}\varkappa(t-t')} \sin n' (t-t') \, U dt' \quad . \quad . \quad (5).$$

Ist keine Reibung vorhanden, so haben wir einfach:

$$u = \frac{1}{n} \int^{t} \sin n (t-t') \, U dt' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

U ist die Kraft zur Zeit t'.

Die untere Grenze des Integrals ist im Allgemeinen beliebig, es wird meist aber zweckmässig sein, für dieselbe die Null zu nehmen.

Unter dieser Voraussetzung verschwinden die durch Gleichung (6) gegebenen Werthe von u und $\dot{u}$, wenn $t = 0$ ist; die vollständige Lösung ist dann:

$$u = e^{-\frac{1}{2}\varkappa t} \left\{ \dot{u}_0 \frac{\sin n't}{n'} + u_0 \left(\cos n' t + \frac{\varkappa}{2n'} \sin n' t \right) \right\} + \frac{1}{n'} \int_0^{t} e^{-\frac{1}{2}\varkappa(t-t')} \sin n' (t-t') \, U dt' \quad (7),$$

oder wenn keine Reibung vorhanden ist:

$$u = \dot{u}_0 \frac{\sin nt}{n} + u_0 \cos nt + \frac{1}{n}\int_0^t \sin n(t-t')\,U\,dt' \quad . \; . \quad (8).$$

Wenn t gross genug ist, verschwindet das Ergänzungsglied wegen des Factors $e^{-1/2\varkappa t}$ und kann deshalb vernachlässigt werden.

67. Für die meisten akustischen Zwecke genügt es, die Schwingungen des Systems, mit welchen wir zu thun haben, als unendlich klein, oder lieber als unendlich kleinen Schwingungen ähnlich zu nehmen. Diese Einschränkung ist das Fundament der wichtigen Gesetze des Isochronismus für freie Schwingungen, sowie der Grund für die Beharrlichkeit der Periode für erzwungene Schwingungen. Es sind indessen auch Erscheinungen eines untergeordneten, aber doch nicht unbedeutenden Charakters vorhanden, welche wesentlich von dem Quadrat und den höheren Potenzen der Bewegung abhängen. Wir wollen daher den Rest dieses Capitels der Discussion der Bewegung eines Systems mit einem Grad von Freiheit widmen, wenn die Bewegung nicht so klein ist, dass die Quadrate und höheren Potenzen alle zusammen vernachlässigt werden können.

Die angenäherten Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie sind:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_0 + m_1 u\right)\dot{u}^2, \; V = \frac{1}{2}\left(\mu_0 + \mu_1 u\right)u^2.$$

Differentiren wir die Summe von T und V nach der Zeit, so finden wir für die Bewegungsgleichung:

$$m_0\ddot{u} + \mu_0 u + m_1 u\ddot{u} + \frac{1}{2} m_1 \dot{u}^2 + \frac{3}{2}\mu_1 u^2 = \text{Aeusserer Kraft.}$$

Diese Gleichung kann etwa nach der Näherungsmethode aufgelöst werden. Der Einfachheit halber nehme ich den Fall, dass $m_1 = 0$, eine Annahme, welche das Wesentliche der Frage in keiner Hinsicht berührt. Die Trägheit des Systems ist daher constant, während die in die Gleichgewichtslage zurück-

treibende Kraft eine zusammengesetzte Function der Verschiebung ist, theils proportional der Verschiebung selbst, und theils dem Quadrate derselben — folglich unsymmetrisch ist in Bezug auf die Gleichgewichtslage. Daher ist für freie Schwingungen unsere Gleichung von der Form:

$$\ddot{u} + n^2 u + \alpha u^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

mit der angenäherten Lösung:

$$u = A \cos nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

worin A — die Amplitude — als eine kleine Grösse behandelt werden muss.

Setzen wir den durch Gleichung (2) angegebenen Werth von u in das letzte Glied von (1), so finden wir:

$$\ddot{u} + n^2 u = -\alpha \frac{A^2}{2}(1 + \cos 2nt),$$

woraus man als zweite Annäherung an den wahren Werth von u erhält:

$$u = A \cos nt - \frac{\alpha A^2}{2n^2} + \frac{\alpha A^2}{6n^2} \cos 2nt \quad \ldots \quad (3).$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Eigenton (n) des Systems von seiner Octave ($2n$) begleitet wird, deren relative Bedeutung mit dem Quadrat der Amplitude wächst. Ein geübtes Ohr vermag im Allgemeinen die Octave zu erkennen in dem Klang einer Stimmgabel, die mittelst eines Violinbogens in starke Schwingungen versetzt ist; mit Hülfsmitteln, die später erklärt werden, kann das Vorhandensein der Octave Jedermann deutlich gemacht werden. Durch Verfolgen derselben Methode kann die Annäherung noch weiter getrieben werden; wir wollen aber jetzt zu dem Fall eines Systems übergehen, bei welchem die zurücktreibende Kraft symmetrisch zur Gleichgewichtslage ist. Die Bewegungsgleichung ist dann angenähert:

$$\ddot{u} + n^2 u + \beta u^3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

welche man als auf die Schwingungen eines schweren Pendels oder eines von dem Ende einer geraden Feder getragenen Gewichtes bezüglich ansehen kann.

Nehmen wir als erste Annäherung $u = A \cos nt$, welches $\beta = 0$ entspricht, und setzen dann diesen Werth ein in das mit β multiplicirte Glied, so erhalten wir:

$$\ddot{u} + n^2 u = -\frac{\beta A^3}{4} \cos 3nt - \frac{3\beta A^3}{4} \cos nt.$$

Dem letzten Gliede dieser Gleichung entsprechend würden wir in der Lösung ein Glied von der Form $t \sin nt$ erhalten, welches ohne Grenzen mit t wächst. Dies zeigt, wie in einem analogen Falle in der Mondtheorie, dass unsere als solche angenommene erste Annäherung in Wirklichkeit überhaupt keine Annäherung ist, oder dass dieselbe wenigstens nicht fortdauernd für alle Zeiten eine solche bleibt. Nehmen wir indess als unsern Ausgangspunkt $u = A \cos mt$, mit einem zweckmässigen Werthe von m, so werden wir finden, dass die Lösung mit Hülfe von periodischen Ausdrücken allein vervollständigt werden kann. In der That ist es vor der Hand klar, dass Alles, was wir berechtigt sind anzunehmen, sich darauf beschränkt, dass die Bewegung angenähert einfach harmonisch ist mit einer Periode, welche angenähert dieselbe ist, als wenn $\beta = 0$. Eine sehr kleine Untersuchung ist hinreichend zu zeigen, dass das proportional u^3 sich ändernde Glied die Periode nicht allein beeinflussen kann, sondern beeinflussen muss. Zu gleicher Zeit ist es evident, dass eine Lösung, bei welcher die Periode unrichtig angenommen wurde, ohne Rücksicht darauf, wie klein diese Unrichtigkeit auch sein mag, auf die Dauer aufhören muss, die Bewegung mit irgend einer Annäherung an Genauigkeit darzustellen.

Wir nehmen also für die angenäherte Gleichung:

$$\ddot{u} + n^2 u = -\frac{3\beta A^3}{4} \cos mt - \frac{\beta A^3}{4} \cos 3mt. \quad (5)$$

deren Lösung ist:

$$u = A \cos mt + \frac{\beta A^3}{4} \frac{\cos 3mt}{9m^2 - n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

vorausgesetzt, dass m so genommen wird, dass es der Gleichung genügt:

$$A\,(-m^2 + n^2) = -\frac{3\beta A^3}{4}$$

oder:

$$m^2 = n^2 + \frac{3\beta A^2}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Das Glied mit β verursacht also zwei Wirkungen. Es beeinflusst die Höhe der fundamentalen Schwingung und führt als eine nothwendige Begleitung die Duodecime ein. Die Aenderung der Höhe ist in den meisten Fällen ausserordentlich klein, da sie von dem Quadrate der Amplitude abhängt, indess ist sie nicht ganz unmerkbar. Stimmgabeln nehmen im Allgemeinen, wenn die Schwingungen abnehmen, ein wenig, wenn auch sehr wenig, an Höhe zu. Es mag bemerkt werden, dass dieselbe kleine Abhängigkeit der Höhe von der Amplitude eintritt, wenn die Kraft von der Form $n^2 u + \alpha u^2$ ist, wovon man sich überzeugen konnte, wenn man die Annäherung an die Lösung der Gleichung (1) noch einen Schritt weiter wie in (3) getrieben hätte. Das Resultat in diesem Falle ist:

$$m^2 = n^2 + \frac{\alpha^2 A^2}{6 n^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Die Differenz $m^2 - n^2$ ist in beiden Fällen in Bezug auf A von derselben Ordnung; aber in einer Hinsicht existirt ein erwähnenswerther Unterschied, nämlich der, dass in (8) m^2 stets grösser wie n^2 ist, während es in (7) von dem Zeichen von β abhängt, ob die Einwirkung dieser Differenz die Tonhöhe erhöht oder erniedrigt. In den meisten Fällen der unsymmetrischen Art wird indessen die Aenderung der Tonhöhe theils von einem Ausdruck von der Form αu^2 und theils von einem andern von der Form βu^3 abhängen; dann ist:

$$m^2 = n^2 + \frac{\alpha^2 A^2}{6 n^2} + \frac{3\beta A^2}{4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

68. Wir gehen nun zu der Betrachtung von unfreien Schwingungen über, die eintreten, wenn auf ein unsymmetrisches System zwei harmonische Kräfte:

$$E \cos pt,\; F \cos(qt - \varepsilon)$$

wirken.

Die Bewegungsgleichung ist:

$$\ddot{u} + n^2 u = -\alpha u^2 + E \cos pt + F \cos (qt - \varepsilon) \quad . \quad (1).$$

Um eine erste Annäherung zu finden, vernachlässigen wir das α enthaltende Glied. Daraus folgt dann:

$$u = e \cos pt + f \cos (qt - \varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin

$$e = \frac{E}{n^2 - p^2}, f = \frac{F}{n^2 - q^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Setzen wir diesen Werth in das mit α multiplicirte Glied ein, so erhalten wir:

$$\ddot{u} + n^2 u = E \cos pt + F \cos (qt - \varepsilon)$$
$$-\alpha \left[\frac{e^2 + f^2}{2} + \frac{e^2}{2} \cos 2pt + \frac{f^2}{2} \cos 2(qt - \varepsilon) + ef \cos \{(p - q)t + \varepsilon\} \right.$$
$$\left. + ef \cos \{(p + q)t - \varepsilon\} \right],$$

woraus als eine zweite Annäherung für u folgt:

$$u = e \cos pt + f \cos (qt - \varepsilon) - \frac{\alpha (e^2 + f^2)}{2 n^2} - \frac{\alpha e^2}{2 (n^2 - 4p^2)} \cos 2pt$$
$$- \frac{\alpha f^2}{2 (n^2 - 4q^2)} \cos 2(qt - \varepsilon) - \frac{\alpha ef}{n^2 - (p - q)^2} \cos \{(p - q)t + \varepsilon\}$$
$$- \frac{\alpha ef}{n^2 - (p + q)^2} \cos \{(p + q)t - \varepsilon\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Die hinzuzufügenden Glieder stellen Schwingungen dar, deren Schwingungszahlen nach einander das Doppelte und die Summe und Differenz von denen der ersten Schwingungen sind. Die Amplituden der beiden letzten Glieder sind dem Product der ursprünglichen Amplituden proportional, ein Zeichen, dass die abgeleiteten Töne in einer Weise wachsen, die abhängig von der Stärke ihrer Grundtöne ist.

In einem der folgenden Capitel werden wir die wichtigen Folgerungen zu betrachten haben, welche Helmholtz aus dieser Theorie abgeleitet hat.

Drittes Capitel.

Schwingende Systeme im Allgemeinen.

69. Wir haben im Vorigen einigermaassen im Detail die Schwingungen eines Systems untersucht, das einen Grad von Freiheit besitzt; die Resultate, zu denen wir gelangt sind, finden weitgehende Anwendung. Materielle Systeme erfreuen sich indessen im Allgemeinen mehr wie eines Grades von Freiheit. Um die Configuration solcher Systeme in jedem Momente zu bestimmen, müssen verschiedene von einander unabhängige veränderliche Grössen genau bestimmt werden, welche nach einer Verallgemeinerung einer ursprünglich für einen Punkt gebrauchten Sprachweise die Coordinaten des Systems genannt werden; die Anzahl der unabhängigen Coordinaten ist der Index der Freiheit. Genau gesprochen sind von den in einem natürlichen Systeme möglichen Verschiebungen unendlich viele von einander verschiedene vorhanden; sie können daher nicht in der Weise dargestellt werden, als wenn sie durch eine endliche Anzahl von Verschiebungen einer bestimmten Art hergestellt werden können. Den elementaren Theilen eines festen Körpers kann jede beliebige Verschiebung ertheilt werden, welche die Bedingungen der Continuität erfüllt. Nur durch einen Process der Abstraction von der Art, wie derselbe beständig in der theoretischen Physik gemacht wird, behandeln wir feste Körper als starr, Flüssigkeiten als incompressibel, und führen

andere Vereinfachungen ein, so dass schliesslich die Lage eines Systems von einer endlichen Anzahl von Coordinaten abhängt. Es ist indessen nicht unsere Absicht, die Betrachtung eines Systems auszuschliessen, das unendlich viele verschiedene Freiheiten besitzt; im Gegentheil werden einige der interessantesten Anwendungen der Resultate dieses Capitels in dieser Richtung liegen. Solche Systeme werden aber meist zweckmässig als Grenzen anderer aufgefasst, deren Freiheit beschränkter ist. Wir wollen demgemäss beginnen mit einem Systeme, dessen Lage durch eine endliche Anzahl von unabhängigen Coordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 etc. festgestellt wird.

70 (273). Das Hauptproblem der Akustik besteht in der Untersuchung der Schwingungen eines Systems um eine Lage von stabilem Gleichgewicht; es ist indessen zweckmässig, mit dem statischen Theile des Gegenstandes anzufangen. Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeit ist, wenn wir die Coordinaten ψ_1, ψ_2 etc. von der Gleichgewichtsconfiguration an rechnen, die potentielle Energie irgend einer andern Configuration des Systems eine homogene quadratische Function der Coordinaten, vorausgesetzt, dass die Verschiebung hinreichend klein ist. Diese Grösse wird V genannt und stellt die Arbeit dar, welche beim Uebergang aus der augenblicklichen in die Gleichgewichtslage gewonnen werden kann.

Wir können schreiben:

$$V=\frac{1}{2}c_{11}\psi_1^2+\frac{1}{2}c_{22}\psi_2^2+\cdots+c_{12}\psi_1\psi_2+c_{23}\psi_2\psi_3+ \cdot \quad (1).$$

Da nach Voraussetzung das Gleichgewicht vollkommen stabil ist, so müssen die Grössen c_{11}, c_{22}, c_{12} etc. solche Werthe haben, dass V für alle reellen Werthe der Coordinaten positiv ist.

71 (313). Wird das System durch die Wirkung gegebener Kräfte aus der Nulllage herausgebracht, so kann die neue Gestalt nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeit gefunden werden. Ist die von den gegebenen Kräften bei den angenommenen Verschiebungen $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$ etc. geleistete Arbeit:

$$\Psi_1\,\delta\psi_1 + \Psi_2\,\delta\psi_2 + \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

so muss dieser Ausdruck äquivalent sein δV, so dass die neue Gleichgewichtslage, da $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$ etc. unabhängig von einander sind, bestimmt wird durch:

$$\frac{dV}{d\psi_1} = \Psi_1, \frac{dV}{d\psi_2} = \Psi_2 \text{ etc.} \ldots \ldots \quad (2),$$

oder nach (1) aus §. 70:

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}\psi_1 + c_{12}\psi_2 + c_{13}\psi_3 + \ldots = \Psi_1 \\ c_{21}\psi_1 + c_{22}\psi_2 + c_{23}\psi_3 + \ldots = \Psi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \quad (3).$$

Die Werthe von c_{sr} und c_{rs} sind hierin einander gleich.

Aus diesen Gleichungen können die Coordinaten in Werthen der Kräfte bestimmt werden. Ist ∇ die folgende Determinante:

$$\nabla = \left|\begin{array}{l} c_{11}, c_{12}, c_{13}, \ldots \\ c_{21}, c_{22}, c_{23}, \ldots \\ c_{31}, c_{32}, c_{33}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right| \ldots\ldots \quad (4),$$

dann kann die Auflösung von (3) nach den Coordinaten geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \cdot \psi_1 = \frac{d\nabla}{dc_{11}}\Psi_1 + \frac{d\nabla}{dc_{12}}\Psi_2 + \ldots \\ \nabla \cdot \psi_2 = \frac{d\nabla}{dc_{21}}\Psi_1 + \frac{d\nabla}{dc_{22}}\Psi_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \quad (5).$$

Diese Gleichungen bestimmen ψ_1, ψ_2 etc. eindeutig, da ∇ nicht verschwinden kann. Es ergiebt sich dies letztere aus der Betrachtung, dass die Gleichungen $\frac{dV}{d\psi_1} = 0$ etc. sonst durch endliche Werthe der Coordinaten erfüllt werden könnte, nur vorausgesetzt, dass die Verhältnisse zweckmässig gewählt werden. Und dies ist der Hypothese entgegengesetzt, dass das System in der Null-Configuration vollkommen stabil ist.

72. Sind $\psi_1, \ldots \Psi_1, \ldots$ und $\psi_1', \ldots \Psi_1', \ldots$ zwei Sätze von Verschiebungen und entsprechenden Kräften, so haben wir die folgende reciproke Beziehung:

$$\Psi_1\psi_1' + \Psi_2\psi_2' + \ldots = \Psi_1'\psi_1 + \Psi_2'\psi_2 + \ldots \quad (1),$$

wovon man sich überzeugen kann, wenn man die Werthe der Kräfte einsetzt, wodurch jede Seite von (1) die Form annimmt:

$$c_{11}\psi_1\psi_1' + c_{22}\psi_2\psi_2' + \ldots$$
$$+ c_{12}(\psi_2\psi_1' + \psi_2'\psi_1) + c_{23}(\psi_3\psi_2' + \psi_2\psi_3') + \ldots.$$

Nehmen wir nun an: in (1) verschwänden alle Kräfte mit Ausnahme von Ψ_2 und Ψ_1'; dann ist:

$$\Psi_2\psi_2' = \Psi_1'\psi_1 \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Sind die Kräfte Ψ_2 und Ψ_1' von derselben Art, so können wir dieselben als gleich annehmen; daraus erkennen wir dann, dass eine Kraft von irgend einem Typus, allein wirkend, eine Verschiebung eines zweiten Typus hervorruft, welche gleich der Verschiebung vom ersten Typus ist, die durch die Wirkung einer gleich grossen Kraft des zweiten Typus hervorgerufen wird. Sind z. B. A und B zwei Punkte einer in irgend einer Weise horizontal schwebenden Stange, so ist die verticale Neigung in A, wenn ein Gewicht W in B angebracht ist, dieselbe wie die Neigung in B, wenn das Gewicht in A angebracht ist[1]).

73. Da V eine homogene quadratische Function der Coordinaten ist, so haben wir:

$$2V = \frac{dV}{d\psi_1}\psi_1 + \frac{dV}{d\psi_2}\psi_2 + \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oder, wenn Ψ_1, Ψ_2 etc. die Kräfte sind, welche nothwendig werden, um die durch ψ_1, ψ_2 etc. dargestellten Verschiebungen aufrecht zu erhalten:

$$2V = \Psi_1\psi_1 + \Psi_2\psi_2 + \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

---

1) Ueber diesen Gegenstand sehe man Phil. Mag., Decbr. 1874 und März 1875.

Stellen $\psi_1 + \triangle\psi_1$, $\psi_2 + \triangle\psi_2$ andere Verschiebungen dar, für welche die dazu nothwendigen Kräfte sind $\Psi_1 + \triangle\Psi_1$, $\Psi_2 + \triangle\Psi_2$ etc., so ist die entsprechende potentielle Energie gegeben durch:

$$\begin{aligned} 2(V + \triangle V) &= (\Psi_1 + \triangle\Psi_1)(\psi_1 + \triangle\psi_1) + \cdots \\ &= 2V + \Psi_1\triangle\psi_1 + \Psi_2\triangle\psi_2 + \cdots \\ &\quad + \triangle\Psi_1 \cdot \psi_1 + \triangle\Psi_2 \cdot \psi_2 + \cdots \\ &\quad + \triangle\Psi_1 \cdot \triangle\psi_1 + \triangle\Psi_2 \cdot \triangle\psi_2 + \cdots, \end{aligned}$$

so dass wir schreiben können:

$$2\triangle V = \Sigma\Psi.\triangle\psi + \Sigma\triangle\Psi.\psi + \Sigma\triangle\Psi.\triangle\psi \quad . . (3),$$

worin $\triangle V$ die Differenz der potentiellen Energieen in den beiden Fällen ist. Wir müssen besonders noch erwähnen, dass nach der reciproken Gleichung (1) in §. 72:

$$\Sigma\Psi.\triangle\psi = \Sigma\triangle\Psi.\psi \quad . . . . (4).$$

Aus (3) und (4) können wir zwei wichtige Sätze herleiten, die sich auf den Werth von V für ein gegebenen Verschiebungen und resp. gegebenen Kräften ausgesetztes System beziehen.

74. Der erste Satz hat den Inhalt, dass, wenn gegebene Verschiebungen (die nicht für sich allein hinreichend sind, die Configuration zu bestimmen) in einem System durch Kräfte entsprechender Arten hervorgebracht werden, dass dann für das so verschobene und im Gleichgewicht befindliche System der resultirende Werth von V der kleinstmöglichste unter den gegebenen Verschiebungsbedingungen ist, und dass der Werth von V für jede andere Configuration den eben genannten Werth von V um die potentielle Energie der Configuration, welche die Differenz der zwei genannten ist, übertrifft. Die einzige Schwierigkeit in der obigen Fassung besteht in dem Verständniss dessen, was unter „Kräften entsprechender Art“ verstanden wird. Nehmen wir z. B. an: das System sei eine gespannte Saite, auf welcher ein gegebener Punkt P einer gegebenen Verschiebung unterliegt; die Kraft entsprechender Art ist hier eine Kraft, welche in dem Punkte P selber angreift. Und allgemein müssen die Kräfte, durch welche die

vorgesetzte Verschiebung ausgeführt werden soll, der Art sein, dass dieselben keine Arbeit auf das System ausüben würden, wenn nur vorausgesetzt wird, dass diese Verschiebung nicht gemacht wird.

Durch eine zweckmässige Wahl der Coordinaten können die gegebenen Verschiebungsbedingungen dadurch ausgedrückt werden, dass man den ersten r-Coordinaten $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_r$ gegebene Werthe vorschreibt; die auf die Kräfte bezüglichen Bedingungen werden dann dadurch dargestellt, dass man die Kräfte der übrigbleibenden Arten Ψ_{r+1}, Ψ_{r+2} etc. verschwinden lässt. Wenn $\psi + \triangle\psi$ sich auf irgend eine andere Configuration des Systems bezieht und $\Psi + \triangle\Psi$ die entsprechenden Kräfte sind, so müssen wir annehmen, dass $\triangle\psi_1$, $\triangle\psi_2$ etc. bis $\triangle\psi_r$ sämmtlich verschwinden. Daher verschwinden für die ersten r Indices $\triangle\psi$ und für die übrigbleibenden Indices die Grössen Ψ. Demnach ist $\Sigma\,\Psi.\triangle\psi$ gleich Null und daher auch $\Sigma\triangle\Psi.\psi$ gleich Null. Hieraus:

$$2\triangle V = \Sigma\triangle\Psi.\triangle\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Diese Gleichung beweist, dass, so wie die gegebenen Verschiebungen auf einem andern wie dem vorgeschriebenen Wege gemacht werden, die potentielle Energie um die Energie der Differenz der beiden Configurationen wächst.

Mittelst dieses Satzes können wir die Wirkung irgend einer Verringerung in der Steifigkeit eines gegebenen Verschiebungsbedingungen unterworfenen Systems auf V bestimmen. Denn wenn nach einer Aenderung der Steifigkeit die ursprüngliche Gleichgewichtsconfiguration ins Auge gefasst wird, dann ist nach Annahme der dieser letztern entsprechende Werth von V geringer wie vorher; ferner wird, wie wir eben gesehen haben, noch eine weitere Verringerung in dem Werth von V vor sich gehen, wenn das System unter den veränderten Bedingungen zum Gleichgewicht übergeht. Daher schliessen wir, dass eine Verringerung von V als eine Function der Coordinaten ebenso eine Verringerung in dem wirklichen Werthe von V in sich schliesst, wenn ein System gegebene Verschiebungen erleidet. Es ist aber leicht verständlich,

dass in einzelnen Fällen die erwähnte Verminderung verschwinden kann [1]).

Wenn z. B. ein Punkt einer an beiden Enden eingeklemmten Stange seitlich um einen kleinen Betrag durch eine dort angebrachte Kraft verschoben wird, so wird die potentielle Energie der Deformation durch jede Verminderung (wenn auch nur von localer Natur) der Steifigkeit der Stange verringert.

75 (T. 195). Der zweite Satz bezieht sich auf ein durch gegebene Kräfte verschobenes System; er behauptet, dass in diesem Falle der Werth von V im Gleichgewicht grösser ist, als er für jede andere Configuration sein würde, in welcher das System unter Wirkung der gegebenen Kräfte bloss durch Gebundenheit in Ruhe erhalten werden könnte. Wir werden sehen, dass die Entfernung der Gebundenheit den Werth von V steigert.

Die Coordinaten mögen so gewählt sein, dass die Bedingungen der Gebundenheit ausgedrückt werden durch:

$$\psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0, \ldots \psi_r = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Wir haben dann zu beweisen, dass, bei gegebenen Ψ_{r+1}, Ψ_{r+2} etc., V den kleinsten Werth hat, wenn die Bedingungen (1) erfüllt sind. Wird die zweite Configuration wie vorher durch $\psi_1 + \Delta\psi_1$ etc. bezeichnet, so sehen wir wieder, dass ψ für die Indices bis r inclusive verschwindet, und für höhere Indices ebenso $\Delta\Psi$. Daher ist:

$$\Sigma\psi\,.\,\Delta\Psi = \Sigma\,\Delta\psi\,.\,\Psi = 0,$$

und deshalb:

$$2\,\Delta V = \Sigma\,\Delta\Psi\,.\,\Delta\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Diese Gleichung zeigt, dass das der Entfernung der Gebundenheit zu verdankende Wachsthum von V gleich ist der potentiellen Energie des Unterschiedes der beiden Configurationen.

[1]) Man sehe eine Arbeit nach über: General Theorems relating to Equilibrium and Initial and Steady Motions. Phil. Mag. März 1875.

76 (T. 310 und 313). Wir gehen nun zu der Untersuchung der Anfangsbewegung eines Systems über, welches unter der Einwirkung von gegebenen Impulsen aus seiner Ruhe heraustritt. Die hierdurch erhaltene Bewegung ist unabhängig von irgend einer potentiellen Energie, welche das System besitzen mag, wenn es wirklich verschoben wird, da wir nach der Natur eines Impulses nur mit der Anfangsconfiguration selbst zu thun haben. Die Anfangsbewegung ist demnach unabhängig von irgend welchen Kräften einer endlichen Art, mögen dieselben nun von aussen auf das System wirken, oder von der Natur der Viscosität sein.

Sind P, Q, R die parallel den Coordinatenaxen gehenden Componenten der Impulse auf ein Theilchen von m, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, so haben wir nach D'Alembert's Princip:

$$\Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) = \Sigma(P\delta x + Q\delta y + R\delta z) \quad . \quad (1),$$

worin $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ die von dem Theilchen in Folge der Einwirkung der Impulse erlangten Geschwindigkeiten bezeichnen, und δx, δy, δz jeder beliebigen Verschiebung des Systems entsprechen, welche die Verbindung der Theile desselben nicht zerstört. Wir gehen darauf aus, Gleichung (1) in eine Gleichung umzuformen, welche die verallgemeinerten von einander unabhängigen Coordinaten enthält.

Für die linke Seite erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) &= \delta\psi_1\, \Sigma m\left(\dot{x}\frac{dx}{d\psi_1} + \dot{y}\frac{dy}{d\psi_1} + \dot{z}\frac{dz}{d\psi_1}\right) \\ &\quad + \delta\psi_2\, \Sigma m\left(\dot{x}\frac{dx}{d\psi_2} + \dot{y}\frac{dy}{d\psi_2} + \dot{z}\frac{dz}{d\psi_2}\right) + \cdots \\ &= \delta\psi_1\, \Sigma m\left(\dot{x}\frac{d\dot{x}}{d\dot{\psi}_1} + \dot{y}\frac{d\dot{y}}{d\dot{\psi}_1} + \dot{z}\frac{d\dot{z}}{d\dot{\psi}_1}\right) + \cdots \\ &= \delta\psi_1 \cdot \frac{1}{2}\Sigma m \frac{d}{d\dot{\psi}_1}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \cdots \\ &= \delta\psi_1 \frac{dT}{d\dot{\psi}} + \delta\psi_2 \frac{dT}{d\dot{\psi}_2} + \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),\end{aligned}$$

worin angenommen wird, dass T, die kinetische Energie des Systems, als Function von $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$ ausgedrückt ist.

Auf der rechten Seite erhalten wir:

$$\Sigma\,(P\delta x + Q\delta y + R\delta z)$$

$$= \delta\psi_1\,\Sigma m\left(P\,\frac{dx}{d\psi_1} + Q\,\frac{dy}{d\psi_1} + R\,\frac{dz}{d\psi_1}\right) + \cdots$$

$$= \xi_1\,\delta\psi_1 + \xi_2\,\delta\psi_2 + \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

wenn:

$$\Sigma m\left(P\,\frac{dx}{d\psi_1} + Q\,\frac{dy}{d\psi_1} + R\,\frac{dz}{d\psi_1}\right) = \xi_1 \text{ etc.}$$

Die transformirte Gleichung lautet also:

$$\left(\frac{dT}{d\dot\psi_1} - \xi_1\right)\delta\psi_1 + \left(\frac{dT}{d\dot\psi_2} - \xi_2\right)\delta\psi_2 + \cdots = 0 \quad . . (4),$$

worin jetzt $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$ etc. vollständig von einander unabhängig sind. Daher haben wir, um die Bewegung zu bestimmen:

$$\frac{dT}{d\dot\psi_1} = \xi_1,\ \frac{dT}{d\dot\psi_2} = \xi_2 \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

worin ξ_1, ξ_2 etc. als die allgemeinen Impulscomponenten aufgefasst werden können.

77. Da T eine homogene quadratische Function der allgemeinen Coordinaten ist, so können wir setzen:

$$T = \frac{1}{2}a_{11}\dot\psi_1^2 + \frac{1}{2}a_{22}\dot\psi_2^2 + \cdots + a_{12}\dot\psi_1\dot\psi_2 + a_{23}\dot\psi_2\dot\psi_3 + \quad . . (1),$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{dT}{d\dot\psi_1} = a_{11}\dot\psi_1 + a_{12}\dot\psi_2 + a_{13}\dot\psi_3 + \cdots \\ \xi_2 &= \frac{dT}{d\dot\psi_2} = a_{21}\dot\psi_1 + a_{22}\dot\psi_2 + a_{23}\dot\psi_3 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . . (2),$$

die Coefficienten a_{rs} und a_{sr} haben hier denselben Werth.

Aus der Form von T folgt weiter:

$$2\,T = \dot\psi_1\,\frac{dT}{d\dot\psi_1} + \dot\psi_2\,\frac{dT}{d\dot\psi_2} + \cdots$$

$$= \xi_1\dot\psi_1 + \xi_1\dot\psi_2 + \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Die Theorie der Anfangsbewegung ist sehr nahe verwandt mit der Theorie der Verschiebung eines Systems aus einer

Configuration von stabilem Gleichgewicht durch stetig einwirkende Kräfte. In der vorliegenden Theorie besitzt die anfängliche kinetische Energie T dieselben Beziehungen zu den Geschwindigkeiten und Impulsen, welche in der frühern Theorie V zu den Verschiebungen und Kräften hatte. In einer Hinsicht ist die Theorie der Anfangsbewegungen die vollständigere, in so weit als T genau eine homogene quadratische Function der Veränderlichen ist, während für V im Allgemeinen dieses nur angenähert gültig ist.

Wenn $\psi_1, \psi_2, \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots$ einen Satz von Geschwindigkeiten und Impulsen für ein aus der Ruhe aufgestörtes System bedeuten, und $\psi_1', \psi_2', \ldots, \xi_1' \xi_2', \ldots$ einen zweiten Satz, so kann, wie in §. 72, die folgende reciproke Relation bewiesen werden:

$$\xi_1 \psi_1 + \xi_2' \psi_2 + \ldots = \xi_1 \psi_1' + \xi_2 \psi_2' + \ldots \quad (4)[1].$$

Dieser Satz gestattet interessante Anwendungen auf die Bewegungen von Fluida's. Es ist bekannt und wird überdies später im Fortlaufe dieser Untersuchungen noch näher bewiesen werden, dass die Bewegung einer reibungslosen incompressiblen Flüssigkeit, welche aus der Ruhe in die Bewegung übergeht, eine derartige ist, dass ihre Geschwindigkeitscomponenten in jedem Punkte die entsprechenden Differentialquotienten einer gewissen Function sind, welche das Geschwindigkeitspotential genannt wird. Die Flüssigkeit möge in Bewegung gesetzt werden durch eine beliebig vorgeschriebene Deformation der Oberfläche S eines in der Flüssigkeit eingeschriebenen Raumes. Die resultirende Bewegung wird bestimmt durch die Geschwindigkeiten in der Normale der Elemente von S, welche auch den mit diesen Elementen in Berührung stehenden Theilen der Flüssigkeit zukommen. Es werden diese Geschwindigkeiten bezeichnet mit $\frac{du}{dn}$, wenn u das Geschwindigkeitspotential ist, welches, physikalisch interpretirt, den Druckimpuls bezeichnet. Wenn daher v das Geschwindigkeitspoten-

[1]) Thomson und Tait, §. 313 (f).

tial einer zweiten Bewegung ist, welches einem andern Satz von beliebigen Oberflächen-Geschwindigkeiten $\frac{dv}{dn}$ entspricht, so haben wir nach unserm obigen Satze:

$$\iint u \frac{dv}{dn} dS = \iint v \frac{du}{dn} dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

— eine Gleichung, welche sich unmittelbar aus dem Green'schen Satze ergiebt, wenn ausser S nur befestigte Körper in dem Fluidum versenkt sind. Die hier uns vorliegende Methode setzt uns nun in den Stand, ihm eine viel grössere Allgemeinheit zu geben. Z. B. kann es den eingetauchten festen Körpern, anstatt befestigt zu sein, allen oder nur theilweise gestattet sein, die ihnen von dem Drucke des Fluidums ertheilten Bewegungen anzunehmen.

78. Ein specieller Fall des allgemeinen Satzes ist besonderer Erwähnung werth. Bei der ersten Bewegung möge sein:

$$\psi_1 = A,\ \psi_2 = 0,\ \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 \ldots = 0;$$

und bei der zweiten:

$$\psi_1' = 0,\ \psi_2' = A,\ \xi_3' = \xi_4' = \xi_5' \ldots = 0.$$

Dann ist:

$$\xi_1' = \xi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

In Worten heisst dies Folgendes: Wenn mittelst eines zweckmässigen Impulses der entsprechenden Art einem System eine gegebene beliebige Geschwindigkeit einer Coordinate ertheilt wird, so ist der einer zweiten Coordinate entsprechende Impuls, welcher nöthig ist, um einer Aenderung dieser Coordinate vorzubeugen, derselbe, der zu demselben Zwecke für die erste Coordinate erforderlich wäre, wenn die gegebene Geschwindigkeit der zweiten Coordinate ertheilt wäre.

Als einfaches Beispiel nehmen wir zwei Kugeln A und B, die in eine Flüssigkeit versenkt sind und deren Mittelpunkte sich frei nach gewissen Linien bewegen können. Wenn A in eine Bewegung mit einer gewissen Geschwindigkeit versetzt wird, so wird B sich natürlich eben so zu bewegen anfangen.

Der obige Satz sagt aus, dass der zur Verhinderung der Bewegung von B erforderliche Impuls derselbe ist, als wenn A und B ihre Functionen ausgetauscht hätten; und dieses gilt sogar, wenn auch noch andere starre Körper C, D etc., in dem Fluidum sich befinden, mögen dieselben nun fest, oder (im Ganzen oder nur theilweise) frei beweglich sein.

Der Fall von sich gegenseitig durch Induction beeinflussenden electrischen Strömen ist genau ähnlich. Nehmen wir zwei Stromkreise A und B, in deren Nachbarschaft irgend eine Zahl von anderen Drahtkreisen oder festen Conductoren sich befinden mögen. Wenn ein Strom plötzlich in den Stromkreis A entwickelt wird, so ist der in B inducirte elektromotorische Impuls derselbe, als wie der, welcher in A entwickelt wäre, wenn der Strom zunächst in B als primärer entwickelt wäre.

79 (T. 311). Die Bewegung eines Systems, welchem gegebene willkürliche Geschwindigkeiten mittelst der dazu nothwendigen Impulse entsprechender Art ertheilt werden, besitzt eine von Thomson entdeckte bemerkenswerthe Eigenschaft. Die Bedingungen zu derselben sind, dass $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \dots \psi_r$ gegeben sind, während $\xi_{r+1}, \xi_{r+2} \dots$ verschwinden. Es mögen $\psi_1, \psi_2, \dots, \xi_1, \xi_2$, etc. der thatsächlichen Bewegung entsprechen; sodann mögen entsprechen:

$$\psi_1 + \Delta\psi_1,\ \psi_2 + \Delta\psi_2, \dots \xi_1 + \Delta\xi_1,\ \xi_2 + \Delta\xi_2 \dots$$

einer andern Bewegung, welche dieselben Geschwindigkeitsbedingungen erfüllt. Für jeden Index verschwindet also entweder $\Delta\psi$ oder ξ. Nun haben wir für die kinetische Energie der zuletzt angenommenen Bewegung:

$$\begin{aligned} 2(T + \Delta T) &= (\xi_1 + \Delta\xi_1)(\psi_1 + \Delta\psi_1) + \cdots \\ &= 2T + \xi_1\Delta\psi_1 + \xi_2\Delta\psi_2 + \cdots \\ &+ \Delta\xi_1 \cdot \psi_1 + \Delta\xi_2 \cdot \psi_2 + \cdots + \Delta\xi_1\Delta\psi_1 + \Delta\xi_2\Delta\psi_2 + \cdots. \end{aligned}$$

Nach der reciproken Relation (4) des §. 77 haben wir nun:

$$\xi_1\Delta\psi_1 + \cdots = \Delta\xi_1 \cdot \psi_1 + \cdots;$$

die linke Seite ist aber nach Annahme Null, daher ist:

$$2\,\Delta T = \Delta\xi_1\,\Delta\psi_1 + \Delta\xi_2\,\Delta\psi_2 + \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Energie der zuletzt angenommenen Bewegung die der ersten wirklich vorhandenen Bewegung um die Energie der Bewegung übertrifft, welche mit der letztern verbunden werden muss, um die erstere zu geben. Die wirklich dem System inducirte Bewegung hat daher weniger Energie wie irgend eine andere, welche denselben Geschwindigkeitsbedingungen genügt. In einem der folgenden Capitel werden wir von dieser Eigenschaft Gebrauch machen, um für die Energie eines Systems, das mit vorgeschriebenen Geschwindigkeiten in Bewegung gesetzt wird, eine obere Grenze zu finden.

Wenn irgend eine Verminderung in der Trägheit irgend welcher Theile des Systems eintritt, so unterliegt die vorgeschriebenen Geschwindigkeitsbedingungen entsprechende Bewegung im Allgemeinen einer Aenderung. Der Werth von T ist nothwendiger Weise kleiner wie vorher; denn es wird schon eine Abnahme stattfinden, selbst wenn die Bewegung ungeändert bliebe, mithin wird die Abnahme im Werthe von T um so stärker eintreten, wenn die Bewegung der Art ist, dass durch dieselbe T bei gleich bleibender Trägheit zu einem absoluten Minimum gemacht wird. Umgekehrt steigert jeder Zuwachs in der Trägheit den anfänglichen Werth von T.

Dieser Satz ist analog dem aus §. 74. Der dem Satz aus §. 75, welcher sich auf die potentielle Energie eines durch gegebene Kräfte verschobenen Systems bezieht, analoge Satz für Anfangsbewegungen ist der Bertrand'sche Satz; derselbe kann folgendermaassen ausgesprochen werden: — Wenn ein System unter der Wirkung gegebener Impulse aus der Ruhe übergeht in Bewegung, so übertrifft die kinetische Energie der wirklichen Bewegung die irgend einer andern Bewegung, zu welcher das System unter Beihülfe von blossen Gebundenheiten geführt werden kann, um die kinetische Energie der Differenz der Bewegungen[1]).

[1]) Thomson und Tait, §. 311. Phil. Mag. März 1875.

80 (T. 293). Wir wollen nicht länger mit grösserer Ausführlichkeit bei dem Mechanismus eines, Impulsen unterworfenen Systems verweilen, sondern zur Untersuchung von Lagrange's Gleichungen für continuirliche Bewegungen übergehen. Dazu nehmen wir an, dass die die Theile des Systems an einander bindenden Beziehungen nicht explicite Functionen der Zeit sind; diejenigen Fälle von erzwungenen Bewegungen, welche wir zu betrachten haben werden, gehören, wie sich speciell zeigen wird, in den Rahmen dieser Untersuchung.

Nach D'Alembert's Princip in Verbindung mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeit haben wir:

$$\Sigma m(\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y + \ddot{z}\,\delta z) = \Sigma(X\,\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\;.\;\;.\;\;.\;\;(1),$$

worin δx, δy, δz eine Verschiebung des Systems bedeutet von der allgemeinsten möglichen Art, jedoch mit der Voraussetzung, dass keine Verletzung des Zusammenhanges der Theile des Systems Statt findet. Da die Verschiebungen der einzelnen Theile des Systems gegenseitig in Beziehung zu einander stehen, so sind $\delta x \ldots$ nicht von einander unabhängig. Unsere augenblickliche Aufgabe besteht nun darin, die Gleichungen in andere Variablen $\psi_1, \psi_2 \ldots$ zu transformiren, welche von einander unabhängig sein sollen. Wir haben:

$$\ddot{x}\,\delta x = \frac{d}{dt}\,(\dot{x}\,\delta x) = \frac{1}{2}\,\delta \dot{x}^2,$$

so dass:

$$\Sigma m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = \frac{d}{dt}\cdot\Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) - \delta T.$$

In §. 76 haben wir aber schon gefunden:

$$\Sigma m\,(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) = \frac{dT}{d\dot{\psi}_1}\,\delta\psi_1 + \frac{dT}{d\dot{\psi}_2}\,\delta\psi_2 + \cdots,$$

während:

$$\delta T = \frac{dT}{d\dot{\psi}_1}\,\delta\dot{\psi}_1 + \frac{dT}{d\psi_1}\,\delta\psi_1 + \cdots,$$

wenn T als eine quadratische Function von $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2 \ldots$ ausgedrückt wird, deren Coefficienten im Allgemeinen Functionen von $\psi_1, \psi_2 \ldots$ sind. Demnach:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\psi_1}\,\delta\psi_1\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\psi_1}\right).\,\delta\psi_1 + \frac{dT}{d\psi_1}\,\delta\psi_1,$$

in so weit, als ist:

$$\frac{d}{dt}\,\delta\psi_1 = \delta\,\frac{d}{dt}\,\psi_1.$$

Demnach haben wir:

$$\Sigma m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\psi_1}\right) - \frac{dT}{d\psi_1}\right\}\delta\psi_1$$
$$+ \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\psi_2}\right) - \frac{dT}{d\psi_2}\right\}\delta\psi_2 + \;.\;. \quad (2).$$

Daher erhält man, wenn die Transformation der rechten Seite von (1) giebt:

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Psi_1\delta\psi_1 + \Psi_2\delta\psi_2 + . \quad (3),$$

Bewegungsgleichungen von der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\psi}\right) - \frac{dT}{d\psi} = \Psi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4).$$

Da $\Psi\delta\psi$ die auf das System während einer Verschiebung $\delta\psi$ ausgeübte Arbeit bezeichnet, so kann Ψ als die allgemeine Kraftcomponente aufgefasst werden.

Bei einem conservativen System ist es zweckmässig, von Ψ die Theile zu trennen, welche nur von der Configuration des Systems abhängen. Bezeichnet V die potentielle Energie, so können wir darnach schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\psi}\right) - \frac{dT}{d\psi} + \frac{dV}{d\psi} = \Psi \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5),$$

wo Ψ auf diejenigen auf das System wirkende Kräfte begrenzt ist, denen nicht schon in dem Glied $\frac{dV}{d\psi}$ Rechnung getragen wird.

81. Es giebt noch eine andere Gruppe von Kräften, deren Vorhandensein im Speciellen zu erkennen oft von Vortheil ist, das sind die aus der Reibung oder Zähigkeit stammenden Kräfte. Wenn wir annehmen, dass jedes Theilchen des Systems verzögert wird durch Kräfte proportional den Geschwindigkeitscomponenten, so wird die Wirkung die-

ser Verzögerung in der Fundamentalgleichung (1) des §. 80 sich in der Hinzufügung auf der linken Seite von Gliedern:

$$\Sigma\,(\varkappa_x \dot{x}\,\delta x + \varkappa_y \dot{y}\,\delta y + \varkappa_z \dot{z}\,\delta z),$$

zeigen, worin $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$ Coefficienten vorstellen, die unabhängig von der Geschwindigkeit, aber möglicher Weise abhängig von der Configuration des Systems sind. Die Transformation auf die unabhängigen Coordinaten ψ_1, ψ_2 etc. wird auf ähnliche Weise ausgeführt, wie die oben §. 80 gegebene Transformation von:

$$\Sigma m\,(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y + \dot{z}\,\delta z)\;.$$

und giebt:

$$\frac{dF}{d\dot{\psi}_1}\,\delta\psi_1 + \frac{dF}{d\dot{\psi}_2}\,\delta\psi_2 + \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wenn:

$$F = \frac{1}{2}\Sigma\,(\varkappa_x \dot{x}^2 + \varkappa_y \dot{y}^2 + \varkappa_z \dot{z}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\,b_{11}\dot{\psi}_1{}^2 + \frac{1}{2}\,b_{22}\dot{\psi}_2{}^2 + \cdots + b_{12}\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2 + b_{23}\dot{\psi}_2\dot{\psi}_3 + \cdots \quad (2).$$

F ist, wie wohl zu bemerken ist, gleich T eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten, positiv für alle reellen Werthe der Veränderlichen. F stellt den halben Betrag der Energie dar, welche zerstreut wird.

Die obige Untersuchung bezieht sich auf verzögernde Kräfte, die den absoluten Geschwindigkeiten proportional sind; es ist indess eben so wichtig, diese Kräfte als abhängig von den relativen Geschwindigkeiten der Theile des Systems anzunehmen, und glücklicher Weise kann dieses ohne irgend welche vergrösserte Complicirtheit geschehen. Z. B. wird, wenn eine Kraft proportional $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ auf das Theilchen x_1 wirkt, dieselbe Kraft zu gleicher Zeit in gleicher Grösse aber entgegengesetzter Richtung auf das Theilchen x_2 einwirken. Das in der Fundamentalgleichung hinzutretende Glied hat die Form:

$$\varkappa_x\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,\delta x + \varkappa_x\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,\delta x_2,$$

welches geschrieben werden kann:

$$\varkappa_x(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,\delta\,(x_1 - x_2) = \delta\,\psi_1\,\frac{d}{d\dot{\psi}_1}\left\{\frac{1}{2}\varkappa_x\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2\right\} + \cdots,$$

und in dieser Weise weiter für jedes Paar sich gegenseitig beeinflussender Theile. Die einzige Wirkung besteht in der Hinzufügung von neuen Gliedern zu F, welche gleichfalls in der Form (2)[1]) auftreten. Wir werden sofort sehen, dass die Existenz der Function F, welche die Zerstreuungsfunction genannt werden kann, gewisse Beziehungen über die Coefficienten der allgemeinen Schwingungsgleichung in sich schliesst, welche wichtige Consequenzen nach sich zieht[2]).

Wenn nun auch bei einer wichtigen Classe von Fällen die Wirkungen der Zähigkeit durch eine Function F dargestellt werden, so bleibt doch noch die Frage offen, ob eine solche Darstellungsmethode in allen Fällen anwendbar ist. Ich halte es für wahrscheinlich, dass sie stets anwendbar ist; es ist indessen klar, dass wir nicht erwarten dürfen, irgend eine allgemeine Eigenschaft der Zähigkeitskräfte beweisen zu können, wo wir keine genaue Definition besitzen, welche uns in den Stand setzen könnte, mit Sicherheit zu entscheiden, welche Kräfte Zähigkeitskräfte sind und welche nicht. In manchen Fällen reichen Symmetriebetrachtungen hin, um zu beweisen, dass die vorhandenen verzögernden Kräfte als Differentialquotienten einer Zerstreuungsfunction dargestellt werden können. Jedenfalls haben wir dann, ob nun die verzögernden Kräfte proportional der absoluten oder der relativen Geschwindigkeit der Theile des Systems sind, Bewegungsgleichungen von der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\psi}}\right) - \frac{dT}{d\psi} + \frac{dF}{d\dot{\psi}} + \frac{dV}{d\psi} = \Psi \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

82 (337). Wir können jetzt die Bedingung einführen, dass die Bewegung in der unmittelbaren Nachbarschaft einer

---

[1]) Die im Texte auftretenden Differenzen können natürlich bei einem in continuirlicher Weise deformirten Körper in Differentialquotienten übergehen.

[2]) Die Zerstreuungsfunction tritt, so weit ich es wenigstens weiss, zuerst in einem Aufsatz auf über: General Theorems relating to Vibrations, welcher in den Proceedings of the Mathematical Society, Juni 1873, veröffentlicht ist.

Configuration von vollkommenem stabilen Gleichgewicht stattfindet; T und F sind dann homogene Functionen der Geschwindigkeiten mit Coefficienten, welche als Constante zu behandeln sind; V ist eine ähnliche Function der Coordinaten selbst, vorausgesetzt, dass (wie wir es annehmen) der Anfangswerth jeder Coordinate als der Gleichgewichtsconfiguration entsprechend genommen wird. Ueberdies sind alle drei Functionen wesentlich positiv. Da die Glieder von der Form $\frac{dF}{d\dot{\psi}}$ von der zweiten Ordnung in Bezug auf kleine Grössen sind, so werden die Bewegungsgleichungen linear, indem sie die Form annehmen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\psi}}\right)+\frac{dF}{d\dot{\psi}}+\frac{dV}{d\psi}=\Psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

hier sind in Ψ alle Kräfte eingeschlossen, welche auf das System wirken und nicht schon durch die Differentialquotienten von F und V vorweg genommen sind.

Die drei quadratischen Functionen lassen sich in folgender Weise ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}a_{11}\dot{\psi}_1^2+\frac{1}{2}a_{22}\dot{\psi}_2^2+\cdots+a_{12}\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2+\cdots \\ F &= \frac{1}{2}b_{11}\dot{\psi}_1^2+\frac{1}{2}b_{22}\dot{\psi}_2^2+\cdots+b_{12}\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2+\cdots \\ V &= \frac{1}{2}c_{11}\psi_1^2+\frac{1}{2}c_{22}\psi_2^2+\cdots+c_{12}\psi_1\psi_2+\cdots \end{aligned}\right\} (2),$$

hier sind die Coefficienten a, b und c Constante.

Aus Gleichung (1) können wir natürlich wieder auf frühere Resultate kommen, wenn wir F und V oder F und T verschwinden lassen.

Ein dritter Satz von Theoremen, die bei der Anwendung in der Electricitätslehre von Interesse sind, können erhalten werden, indem wir T und V verschwinden lassen, während F bleibt; indess hat es keinen Zweck, diesen Gegenstand hier weiter zu verfolgen.

Setzen wir die Werthe von T, F und V ein und schreiben D für $\frac{d}{dt}$, so erhalten wir ein System von Gleichungen, das in die Form gebracht werden kann:

$$\left.\begin{array}{l} e_{11}\psi_1 + e_{12}\psi_2 + e_{13}\psi_3 + \cdots = \Psi_1 \\ e_{21}\psi_1 + e_{22}\psi_2 + e_{23}\psi_3 + \cdots = \Psi_2 \\ e_{31}\psi_1 + e_{32}\psi_2 + e_{33}\psi_3 + \cdots = \Psi_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (3),$$

worin e_{rs} die folgende Operation von der zweiten Ordnung:

$$e_{rs} = a_{rs}D^2 + b_{rs}D + c_{rs} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

bedeutet.

Es muss besonders hervorgehoben werden, dass, weil:

$$a_{rs} = a_{sr},\; b_{rs} = b_{sr},\; c_{rs} = c_{sr},$$

auch folgt:

$$e_{rs} = e_{sr} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

83. Bevor wir weiter gehen, können wir eine wichtige Folgerung aus der linearen Form unserer Gleichungen ziehen. Wenn zwei durch ψ_1, $\psi_2 \ldots$, ψ_1', $\psi_2' \ldots$ bezeichnete Bewegungen, entsprechend den beiden Sätzen von Kräften Ψ_1, $\Psi_2 \ldots$, Ψ_1', $\Psi_2' \ldots$, möglich sind, dann muss in Verbindung mit der Kraft $\Psi_1 + \Psi_1'$, $\Psi_2 + \Psi_2' \ldots$ auch die Bewegung $\psi_1 + \psi_1'$, $\psi_2 + \psi_2' \ldots$ möglich sein. Als specieller Fall ergiebt sich daraus, wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind: die Uebereinanderlagerung von irgend zwei natürlichen Schwingungen bringt ebenfalls eine natürliche Schwingung hervor. Das ist das berühmte Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen, das zuerst in klarer Weise von Daniel Bernoulli ausgesprochen wurde. Es ist dahin zu verstehen, dass seine Richtigkeit im Allgemeinen abhängt von der Berechtigung der Annahme, dass die Bewegung so klein ist, dass ihr Quadrat vernachlässigt werden kann.

84. Um die freien Schwingungen zu untersuchen, müssen wir Ψ_1, $\Psi_2, \ldots$ gleich Null setzen; wir wollen beginnen mit

einem System, auf welches keine Reibungskräfte wirken, für welches also die Coefficienten e_{rs} etc. gerade Functionen des Symbols D sind. Wir haben:

$$\left.\begin{array}{l} e_{11}\psi_1 + e_{12}\psi_2 + \cdots = 0 \\ e_{21}\psi_1 + e_{22}\psi_2 + \cdots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (1).$$

Aus diesen Gleichungen, von denen so viele (m) vorhanden sind, als das System Grade von Freiheiten besitzt, wollen wir alle Variabeln ausser einer eliminiren. Das Resultat, das dieselbe Form hat, welches auch die zurückbehaltene Coordinate sein mag, kann geschrieben werden:

$$\nabla\psi = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2),$$

worin ∇ die Determinante bedeutet:

$$\left|\begin{array}{l} e_{11}, e_{12}, e_{13} \dots \\ e_{21}, e_{22}, e_{23} \dots \\ e_{31}, e_{32}, e_{33} \dots \\ \dots\dots\dots \end{array}\right| \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3).$$

Diese Determinante ist (wenn keine Reibung vorhanden ist) eine gerade Function von D vom $2m$ten Grade. Es seien $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2 \dots, \pm\lambda_m$ die Wurzeln von $\nabla = 0$, wenn wir letztere Gleichung als Gleichung für D auffassen. Dann ist nach der Theorie der Differentialgleichungen der allgemeinste Werth von ψ:

$$\psi = A\varepsilon^{\lambda_1 t} + A'\varepsilon^{-\lambda_1 t} + B\varepsilon^{\lambda_2 t} + B'\varepsilon^{-\lambda_2 t} + \dots \quad (4),$$

worin die $2m$ Grössen A, A', B, B', etc. willkürliche Constanten sind. Diese Form ist für jede der Coordinaten gültig, die Constanten in den verschiedenen Ausdrücken sind aber nicht von einander unabhängig. In der That, wenn eine particuläre Lösung ist:

$$\psi_1 = A_1\varepsilon^{\lambda_1 t}, \ \psi_2 = A_2\varepsilon^{\lambda_1 t} \text{ etc.},$$

so sind die Verhältnisse der Constanten $A_1 : A_2 : A_3 \cdots$ vollkommen bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} e_{11}A_1 + e_{12}A_2 + e_{13}A_3 + \cdots = 0 \\ e_{21}A_1 + e_{22}A_2 + e_{23}A_3 + \cdots = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad \dots \quad (5),$$

in denen in jedem der Coefficienten von der Form e_{rs} für D eingesetzt ist λ_1. Die Gleichungen (5) sind wegen der Bedingung, dass λ_1 eine Wurzel von $\nabla = 0$ ist, nothwendiger Weise mit einander verträglich. Die Verhältnisse $A_1' : A_2' : A_3' \ldots$, welche der Wurzel $-\lambda_1$ entsprechen, sind dieselben wie die Verhältnisse $A_1 : A_2 : A_3 \ldots$; für die anderen Wurzelpaare λ_2, $-\lambda_2$ etc. existiren aber von einander verschiedene Systeme von solchen Verhältnissen der Coefficienten A.

85. Die Natur des Systems, mit welchem wir zu thun haben, beschränkt in einer höchst wichtigen Weise die überhaupt möglichen Werthe von λ. Wenn λ_1 reell wäre, so würde entweder λ_1 oder $-\lambda_1$ reell und positiv sein; wir würden dann eine particulare Lösung erhalten, für welche die Coordinaten und mit diesen die durch:

$$\lambda_1^2 \left\{ \frac{1}{2} a_{11} A_1^2 + \cdots + a_{12} A_1 A_2 + \cdots \right\} e^{\pm 2 \lambda_1 t}$$

ausgedrückte kinetische Energie ohne Grenzen wachsen. Solch eine Bewegung ist augenscheinlich unmöglich für ein conservatives System (T. 271), dessen ganze Energie sich doch niemals von der Summe der potentiellen und kinetischen Energieen, durch welche es bei dem Uebergang in die Bewegung fortgetrieben wurde, unterscheiden kann. Dieser Schluss wird nicht vermieden, wenn wir λ_1 negativ nehmen; denn wir können die Bewegung eben so gut rückwärts wie vorwärts verfolgen. Es ist eben so sicher, dass die Bewegung niemals unendlich war, wie sie nie unendlich sein wird. Dasselbe Argument schliesst die Möglichkeit eines complexen Werthes von λ aus.

Wir schliessen hieraus, dass alle Werthe von λ rein imaginär sind, indem sie reellen negativen Werthen von λ^2 entsprechen. Analytisch muss die Thatsache, dass die Wurzeln von $\nabla = 0$, diese Gleichung als Gleichung für D^2 aufgefasst, alle reell und negativ sind, eine Consequenz der Beziehungen sein, welche zwischen den Coefficienten a_{11}, $a_{12} \ldots$, c_{11}, $c_{12} \ldots$ wegen der Thatsache bestehen, das T und V für

alle reellen Werthe der Variabeln positiv sind. Der Fall von zwei Graden der Freiheit wird später ausführlicher behandelt werden.

86. Die Form der Lösung können wir nun vortheilhaft umgestalten, indem wir für λ_1 schreiben in_1 (wobei $i = \sqrt{-1}$) und dann neue willkürliche Constante nehmen. Wir erhalten so:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1 = A_1 \cos(n_1 t - \alpha) + B_1 \cos(n_2 t - \beta) + C_1 \cos(n_3 t - \gamma) + \cdots \\ \psi_2 = A_2 \cos(n_1 t - \alpha) + B_2 \cos(n_2 t - \beta) + C_2 \cos(n_3 t - \gamma) + \cdots \\ \psi_3 = A_3 \cos(n_1 t - \alpha) + B_3 \cos(n_2 t - \beta) + C_3 \cos(n_3 t - \gamma) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} (1)$$

worin n_1^2, n_2^2 die m Wurzeln sind der Gleichung $m$ten Grades für n^2, die wir erhalten, wenn wir in $\nabla = 0$ für D^2 schreiben $-n^2$. Für jeden Werth von n sind die Verhältnisse $A_1 : A_2 : A_3 \ldots$ bestimmt und reell.

Dieses ist die vollständige Lösung des Problems der freien Schwingungen eines conservativen Systems. Wir sehen, dass die ganze Bewegung aufgelöst werden kann in m normale harmonische Schwingungen von (im Allgemeinen) verschiedenen Perioden; jede dieser Schwingungen ist ganz unabhängig von den anderen. Ist die von der ursprünglichen Verschiebung abhängende Bewegung der Art, dass sie selbst sich auf eine von diesen Schwingungen (etwa n_1) reducirt, so haben wir:

$$\psi_1 = A_1 \cos(n_1 t - \alpha),\ \psi_2 = A_2 \cos(n_1 t - \alpha) \text{ etc.} \quad . \quad (2),$$

worin die Verhältnisse $A_1 : A_2 : A_3 \ldots$ von der Constitution des Systems abhängen und nur die absolute Amplitude und Phase willkürlich sind. Die verschiedenen Coordinaten befinden sich stets in ähnlichen (oder entgegengesetzten) Schwingungsphasen; alle Theile des Systems befinden sich zu gleicher Zeit in der Configuration des Gleichgewichts.

Wir bemerken hier den mechanischen Grund für das Ueberwiegen der harmonischen Schwingungen. Ist die Bewegung hinreichend klein, so werden die Differentialgleichungen linear mit constanten Coefficienten; nun sind aber Kreis- (und Exponential-) Functionen, die einzigen, welche bei der Differentiation ihren Typus beibehalten.

87 (T. 337). Die m Schwingungsperioden, welche durch die Gleichung $\nabla = 0$ bestimmt werden, sind Grössen, die dem System eigenthümlich sind und welche sich daher stets in derselben Grösse ergeben müssen, was für Coordinaten man auch zur Bestimmung der Configuration des Systems wählen mag. Es giebt indess ein Coördinatensystem, welches besonders zweckmässig ist, nämlich dasjenige, bei welchem die Normalschwingungstypen durch das Verschwinden aller Coordinaten, mit Ausnahme einer einzigen, definirt werden. Für den ersten Typus haben die ursprünglichen Coordinaten ψ_1, ψ_2, etc. bestimmte Verhältnisse; die Grösse, welche den absoluten Werth dieser Coordinaten bestimmt, sei φ_1, so dass also in diesem Typus jede Coordinate ein bekanntes Vielfaches von φ_1 ist. Beim zweiten Typus kann ebenso jede Coordinate als ein bekanntes Vielfache einer zweiten Grösse φ_2 angesehen werden und so fort. Durch eine zweckmässige Bestimmung der m Grössen φ_1, φ_2, etc. kann jede Configuration des Systems dargestellt werden als zusammengesetzt aus den m Configurationen dieser Typen; daher können die Grössen φ selbst als Coordinaten angesehen werden, welche die Configuration des Systems bestimmen. Dieselben werden die Normal-Coordinaten genannt.

T und V reduciren sich, wenn sie in Werthen der Normalcoordinaten ausgedrückt werden, auf die Summe von Quadraten; denn es ist leicht einzusehen, dass wenn die Producte ebenfalls auftreten würden, die resultirenden Schwingungsgleichungen nicht befriedigt würden, wenn man irgend welche $m - 1$ Coordinaten gleich Null setzt, während die übrig bleibende endlich ist.

Wir hätten mit dieser Transformation beginnen können, wenn wir aus der Algebra den Satz entnommen hätten, dass alle homogenen quadratischen Functionen durch lineare Transformation auf die Summen von Quadraten transformirt werden können. Daher haben wir:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} a_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{\varphi}_2^2 + \cdots \\ V &= \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \varphi_2^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Die Coefficienten (bei welchen die doppelten Indices nicht weiter nöthig sind) sind nothwendiger Weise positiv.

Lagrange's Gleichung wird jetzt:

$$a_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 = 0,\; a_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 \varphi_2 = 0 \text{ etc. } \quad . \quad (2).$$

Die Lösung derselben ist:

$$\varphi_1 = A \cos(n_1 t - \alpha),\; \varphi_2 = B \cos(n_2 t - \beta) \text{ etc. } \quad . \quad (3),$$

worin A, B ..., α, β ... willkürliche Constante sind und

$$n_1^2 = c_1 : a_1,\; n_2^2 = c_2 : a_2 \text{ etc. } \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

88. Die Interpretation der Bewegungsgleichungen führt zu einem sehr wichtigen Theorem, welches folgendermaassen ausgesprochen werden kann[1]). Die Periode eines conservativen Systems, das in einem Zustande von Gebundenheit um eine stabile Gleichgewichtslage schwingt, ist dem Werthe nach stationär, wenn der Typus ein normaler ist. Wir können diesen Satz aus den ursprünglichen Schwingungsgleichungen beweisen; indessen ist es zweckmässiger, die Normalcoordinaten zu gebrauchen. Die Gebundenheit, über deren Natur wir annehmen wollen, dass sie nur einen Grad von Freiheit übrig lässt, wird dadurch dargestellt, dass wir die Grössen φ in bestimmten Verhältnissen nehmen.

Setzen wir:

$$\varphi_1 = A_1 \theta,\; \varphi_2 = A_2 \theta, \text{ etc. } \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

so ist θ eine veränderliche Grösse und A_1, A_2 etc. sind für eine gegebene Gebundenheit gegeben.

Die Ausdrücke für T und V werden:

$$T = \left\{\frac{1}{2} a_1 A_1^2 + \frac{1}{2} a_2 A_2^2 + \cdots\right\} \dot{\theta}^2$$

$$V = \left\{\frac{1}{2} c_1 A_1^2 + \frac{1}{2} c_2 A_2^2 + \cdots\right\} \theta^2$$

[1]) Proceedings of the Mathematical Society, June 1873.

woraus sich, wenn θ proportional mit $\cos pt$ ist, ergiebt:

$$p^2 = \frac{c_1 A_1^2 + c_2 A_2^2 + \ldots + c_m A_m^2}{a_1 A_1^2 + a_2 A_2^2 + \ldots + a_m A_m^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Diese Gleichung giebt die Periode der Schwingung des gebundenen Typus; es liegt auf der Hand, dass die Periode stationär ist — d. h. unabhängig von kleinen Aenderungen in der Gebundenheit —, wenn alle Coefficienten A_1, A_2 . . ., mit Ausnahme eines einzigen, verschwinden, d. h. wenn der Typus mit einem der dem Systeme natürlichen zusammenfällt und keine Gebundenheit erforderlich ist.

Mit Hülfe dieses Theorems können wir beweisen, dass ein Zuwachs an Masse in irgend einem Theile des schwingenden Systems von einer Verlängerung aller natürlichen Perioden begleitet ist oder wenigstens, dass dabei keine Periode verkleinert werden kann. Nehmen wir an: der Zuwachs an Masse sei unendlich klein. Nach dieser Aenderung werden die Arten der freien Schwingung im Allgemeinen geändert sein; durch eine zweckmässig angebrachte Gebundenheit kann man es aber dahin bringen, dass das System irgend eine der früheren Arten wiedererhält. Wenn dieses geschehen ist, so ist es sicher, dass die Periode jeder Schwingung, welche eine Bewegung des Theiles enthält, dessen Masse zugenommen hat, verlängert ist. Nur in einem besondern Falle (wenn z. B. ein Gewicht auf den Knotenpunkt einer schwingenden Saite aufgesetzt wird) kann die Periode ungeändert bleiben. Das genannte Theorem gestattet uns nun, zu behaupten, dass die Entfernung der Gebundenheit und die sich daraus ergebende Aenderung der Schwingungsart die Periode nur um eine Grösse von der zweiten Ordnung beeinflussen, und dass deshalb bei unendlich kleiner Aenderung der Masse die freie Periode nicht geringer wie vor der Aenderung sein kann. Durch Integration folgern wir dann weiter, dass ein endlicher Zuwachs an Masse die Periode einer jeden Schwingung verlängert, welche eine Bewegung des Theiles enthält, dessen Masse geändert ist, und dass in keinem Falle die Periode verringert werden kann; um aber zu sehen, wie sich die beiden Sätze von Perioden entsprechen, kann es nothwendig sein, vorauszusetzen, dass die Aenderungen stufenweise gemacht werden.

Umgekehrt muss die Wirkung einer Entfernung eines Theiles der Masse eines schwingenden Systems die sein, dass die Perioden aller freien Schwingungen verkürzt werden.

In gleicher Weise können wir beweisen, dass die Perioden der freien Schwingungen sämmtlich wachsen, wenn das System eine solche Aenderung erfährt, dass die potentielle Energie einer gegebenen Configuration vermindert wird, während die kinetische Energie einer gegebenen Bewegung ungeändert bleibt. Ebenso beweist sich das Umgekehrte dieser Behauptung. Dieser Satz kann manchmal dazu benutzt werden, die Wirkungen einer Gebundenheit aufzusuchen. Denn nehmen wir an, dass die potentielle Energie irgend einer Configuration, welche die Bedingung der auferlegten Gebundenheit verletzt, allmälig wächst, so werden wir zu einem Zustand der Dinge kommen, bei welchem die betreffende Bedingung mit jedem nur gewünschten Grade von Genauigkeit erfüllt ist. Während jedes Schrittes dieses Processes wird (im Allgemeinen) jede freie Schwingung rascher, eine Anzahl von freien Perioden (gleich den verlorenen Graden von Freiheit) werden unendlich klein. Wesentlich dasselbe Resultat kann erreicht werden, ohne dass die potentielle Energie geändert wird, wenn man voraussetzt, dass die kinetische Energie irgend einer Bewegung, welche die betreffende Bedingung verletzt, ohne Grenzen wächst. In diesem Falle werden eine oder mehrere Perioden unendlich gross, die schliesslichen Perioden sind aber dieselben wie die, zu denen man gelangt wäre, wenn die potentielle Energie wächst, obgleich in dem einen Falle die Perioden durchweg gewachsen, und in dem andern verkleinert sind. Dieses Beispiel zeigt die Nothwendigkeit, die Aenderungen schrittweise zu machen; andernfalls würden wir die Correspondenz zweier Sätze von Perioden nicht verstehen. Weitere Illustrationen hierzu werden in dem Abschnitt von zwei Graden von Freiheit ergeben.

Mit Hülfe des Princips, dass der Werth der freien Perioden stationär ist, können wir leicht Correctionen berechnen, welche wegen irgend einer Abweichung des Systems von der theoretischen Einfachheit anzubringen sind. Nehmen wir zur

Berechnung der Periode zunächst an, dass die Art der Schwingung sich nicht geändert hat, nehmen also, wie wir uns der Kürze halber ausdrücken wollen, als hypothetische Schwingungsart die, welche dem einfachen System zukommt, so unterscheidet sich die so gefundene Periode von der wirklichen um Grössen, welche von den Quadraten der Unregelmässigkeiten abhängen. Im Verlaufe dieses Werkes werden sich verschiedene Beispiele derartiger Berechnungen ergeben.

89. Es bleibt jetzt noch ein anderer wichtiger Punkt zu erwähnen, der sich auf die Periode eines Systems, das in einem willkürlichen Typus schwingt, bezieht. Es geht aus Gleichung (2) des §. 88 hervor, dass die Periode der Schwingung, die irgend einem hypothetischen Typus entspricht, zwischen dem grössten und dem kleinsten Werth der dem System natürlichen Perioden liegt. Bei Systemen wie Saiten und Platten, welche so behandelt werden, als seien sie einer continuirlichen Deformation fähig, giebt es keine kleinste natürliche Periode; wir können aber dann noch behaupten, dass die Periode, welche für irgend einen hypothetischen Typus berechnet wird, nicht grösser sein kann, wie die Periode, welche dem tiefsten Normaltypus zukommt. Wenn deshalb die Aufgabe vorliegt, die längste Eigenperiode eines Systems abzuschätzen mit Hülfe von Rechnungen, welche auf einem irgendwie angenommenen Typus begründet sind, so wissen wir *a priori*, dass das Resultat zu klein ausfallen wird.

Bei der Wahl eines hypothetischen Typus muss man eine gewisse Kritik anwenden, da es die Aufgabe ist, dem genauen, wahren Sachverhalt so nahe wie möglich zu kommen, ohne ein zu grosses Opfer an Einfachheit. So kann für eine in einem Punkte schwer belastete Saite der betreffende Typus zweckmässig dem extremen Fall einer unendlichen grossen Belastung, wobei die beiden Theile der Saite gerade sein würden, entnommen werden. Als ein Beispiel einer Berechnung dieser Art, deren Resultat bekannt ist, wollen wir den Fall einer gleichförmigen Saite von der Länge l nehmen, die mit der Spannung T_1 gespannt ist, und für dieselbe untersuchen, welche

Periode sich für bestimmte Voraussetzungen in Betreff des Schwingungstypus ergeben würden.

Nehmen wir den Anfangspunkt der x in der Mitte der Saite; die Schwingungscurve sei auf der positiven Saite gegeben durch:

$$y = \cos p\,t \left\{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Auf der negativen Seite ist sie das Spiegelbild dieser in Bezug auf die y-Axe; n ist nicht kleiner wie Eins. Diese Form genügt der Bedingung, dass y verschwindet, wenn $x = \pm \frac{1}{2}\, l$. Wir müssen jetzt die Ausdrücke für T und V bilden; es reicht hin, nur die positive Hälfte der Saite zu betrachten. Ist ϱ die Längendichtigkeit, so ist:

$$T = \int_0^{\frac{l}{2}} \varrho\, \dot{y}^2\, dx = \frac{\varrho\, n^2\, l\, p^2 \sin^2 p\, t}{2(n+1)(2n+1)}$$

und:

$$V = \frac{1}{2}\, T_1 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{n^2\, T_1 \cos^2 p\, t}{(2n-1)\, l}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$p^2 = \frac{2(n+1)(2n+1)}{2n-1} \cdot \frac{T_1}{\varrho\, l^2} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Ist $n = 1$, so schwingt die Saite, als wenn die Masse in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre. Hierfür ist:

$$p^2 = \frac{12\, T_1}{\varrho\, l^2}.$$

Ist $n = 2$, so wird die Form der Saite parabolisch; es ist hierfür:

$$p^2 = \frac{10\, T_1}{\varrho\, l^2}.$$

Der wahre Werth von p^2 für den tiefsten Typus ist $\frac{\pi^2\, T_1}{\varrho\, l^2}$, so dass die Annahme einer parabolischen Form eine Periode giebt, welche in dem Verhältniss $\pi : \sqrt{10}$ oder $0{,}9936 : 1$ zu

klein ist. Das Minimum von p^2, wie dasselbe sich aus (2) ergiebt, tritt ein, wenn $n = \frac{\sqrt{6}+1}{2} = 1{,}72474$ und giebt:

$$p^2 = 9{,}8990 \frac{T_1}{\varrho l^2}.$$

Die Periode ist hierfür zu klein in dem Verhältniss von

$$\pi : \sqrt{9{,}8990} = 0{,}99851 : 1.$$

Man sieht, dass hier in der Wahl der Typen ein beträchtlicher Spielraum ist, da selbst die extreme Annahme, dass die Saite als zwei gerade Stücke schwingt, eine Periode liefert, welche einen Irrthum von weniger als 10 Proc. giebt. Was für einen Typus wir auch wählen mögen, die von diesem berechnete Periode kann nicht grösser wie die richtige sein.

90. Die strenge Bestimmung der Perioden und Typen der Schwingungen eines gegebenen Systems ist gewöhnlich eine mit grossen Schwierigkeiten verbundene Aufgabe, was daher rührt, dass die Functionen, welche nöthig sind, um die Schwingungsarten der meisten continuirlichen Körper auszudrücken, bisher noch nicht analytisch aufgestellt werden konnten. Es ist daher oft nothwendig, auf die Annäherungsmethoden zurückzugreifen, indem man das vorliegende System auf ein anderes der Analysis zugänglicheres bezieht und Correctionen dazu berechnet, welche auf der Annahme beruhen, dass der Unterschied zwischen den beiden Systemen klein ist. Das Problem der annähernd einfachen Systeme ist daher eins von grosser Wichtigkeit, noch besonders, weil es praktisch unmöglich ist, die einfachen Formen, welche wir am leichtesten behandeln können, in Wirklichkeit herzustellen.

Wir wollen daher annehmen, dass die Schwingungen eines einfachen Systems ganz und gar bekannt sind und dass gefordert wird, die Schwingungen eines Systems aufzusuchen, das von jenem dadurch abgeleitet wird, dass man kleine Aenderungen in die mechanischen Functionen einführt. Sind φ_1, φ_2, etc. die Normalcoordinaten des ursprünglichen Systems, so ist:

$$T = \frac{1}{2}\, a_1 \dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2}\, a_2 \dot{\varphi}_2{}^2 + \cdots,$$

$$V = \frac{1}{2}\, c_1 \varphi_1{}^2 + \frac{1}{2}\, a_2 \varphi_2{}^2 + \cdots;$$

für das variirte System, welches auf dieselben Coordinaten, die jetzt nur angenähert für dasselbe als Normalcoordinaten anzusehen sind, ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} T + \delta T &= \frac{1}{2}(a_1 + \delta a_{11})\,\dot{\varphi}_1{}^2 + \cdots + \delta a_{12}\,\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2 + \cdots \\ V + \delta V &= \frac{1}{2}(c_1 + \delta c_{11})\,\varphi_1{}^2 + \cdots + \delta c_{12}\,\varphi_1\,\varphi_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \;.\;. (1),$$

in welchen Gleichungen δa_{11}, δa_{12}, δc_{11}, δc_{12} etc. als kleine Grössen anzusehen sind. In gewissen Fällen können möglicher Weise noch neue Coordinaten auftreten; wenn das aber der Fall ist, so müssen die Coefficienten derselben klein sein. Aus (1) erhalten wir für die Bewegungsgleichungen von Lagrange (T. 329):

$$\left.\begin{aligned} &(\overline{a_1 + \delta a_{11}}\,D^2 + c_1 + \delta c_{11})\,\varphi_1 + (\delta a_{12} D^2 + \delta c_{12})\,\varphi_2 \\ &\qquad\qquad + (\delta a_{13} D^2 + \delta c_{13})\,\varphi_3 + \cdots = 0 \\ &(\delta a_{21} D^2 + \delta c_{21})\,\varphi_1 + (\overline{a_2 + \delta a_{22}}\,D^2 + c_2 + \delta c_{22})\,\varphi_2 \\ &\qquad\qquad + (\delta a_{23} D^2 + \delta c_{23})\,\varphi_3 + \cdots = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \;.\;.\;. (2).$$

In dem ursprünglichen System sind die Fundamental-Schwingungstypen diejenigen, welche der Variation nur einer Coordinate mit der Zeit entsprechen. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit speciell auf einen dieser Typen richten, etwa auf den, welcher die Variation von φ_r enthält, während alle übrigen Coordinaten verschwinden. Die Aenderung in dem Systeme wird im Allgemeinen eine Aenderung in den Fundamental- oder Normaltypen einschliessen; unter den angenommenen Umständen ist diese Aenderung aber klein. Der neue Normaltypus wird durch die gleichzeitige Variation der anderen Coordinaten, zusammen mit φ_r, ausgedrückt; es ist aber das Verhältniss jeder andern Coordinate φ_s zu φ_r klein. Wenn

diese Verhältnisse bekannt sind, dann ist die Normal-Schwingungsart des geänderten Systems bestimmt.

Da die ganze Bewegung einfach harmonisch ist, so können wir annehmen, dass jede Coordinate sich wie $\cos p_r t$ ändert, und demnach in die Differentialgleichung für D^2 einsetzen $-p_r^2$. In der $s$ten Gleichung hat φ_s den endlichen Coefficienten:

$$-a_s p_r^2 - \delta a_{ss} p_r^2 + c_s + \delta c_{ss}.$$

Der Coefficient von φ_r ist:

$$-\delta a_{rs} p_r^2 + \delta c_{rs}.$$

Die anderen Glieder sind bei der ersten Annäherung zu vernachlässigen, da sowohl die Coordinate (im Verhältnisse zu φ_r), sowie deren Coefficient kleine Grössen sind.

Daher ist:

$$\varphi_s : \varphi_r = -\frac{\delta c_{rs} - p_r^2 \delta a_{rs}}{c_s - p_r^2 a_s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Nun ist:

$$-a_s p_s^2 + c_s = 0,$$

und daher:

$$\varphi_s : \varphi_r = \frac{p_r^2 \delta a_{rs} - \delta c_{rs}}{a_s (p_s^2 - p_r^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

das gesuchte Resultat.

Wenn die kinetische Energie allein Variationen erfährt, so ist:

$$\varphi_s : \varphi_r = \frac{p_r^2}{p_s^2 - p_r^2} \frac{\delta a_{rs}}{a_s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Der corrigirte Werth der Periode wird durch die $r$te Gleichung des Systems (2) bestimmt, welche bis jetzt noch nicht benutzt wurde. Wir können dieselbe schreiben:

$$\varphi_r \{-p_r^2 a_r - p_r^2 \delta a_{rr} + c_r + \delta c_{rr}\}$$
$$+ \Sigma \varphi_s (-p_r^2 \delta a_{rs} + \delta c_{rs}) = 0.$$

Setzen wir für $\varphi_s : \varphi_r$ den in (4) erhaltenen Werth ein so erhalten wir:

$$p_r^2 = \frac{c_r + \delta c_{rr}}{a_r + \delta a_{rr}} - \Sigma \frac{(\delta c_{rs} - p_r^2 \delta a_{rs})^2}{a_s a_r (p_s^2 - p_r^2)} \quad \ldots \quad (6).$$

Das erste Glied giebt den Werth von p_r^2, wie er sich ergiebt, wenn man auf die Aenderung des Typus keine Rücksicht nimmt. Es ist genügend genau, wie wir schon bewiesen haben, wenn das Quadrat der Aenderung in dem System vernachlässigt werden kann. Die Glieder, welche zusammengefasst sind unter dem Symbol Σ, für welches die Summation für alle Werthe von s, mit Ausnahme des Werthes r, ausgedehnt ist, giebt die Correction an, welche von der Aenderung des Typus herrührt, und sind von der zweiten Ordnung. Da a_s und a_r positiv sind, so hängt das Vorzeichen jedes Gliedes ab von dem von $p_s^2 - p_r^2$. Ist $p_s^2 > p_r^2$, d. h. ist die Schwingungsart s rascher wie die Art r, so ist die Correction negativ und macht den berechneten Klang tiefer wie vorher; ist aber die Art s die tiefere, so erhöht die Correction den Klang. Bezieht sich r auf die niedrigste Schwingungsart des Systems, so wird die ganze Correction negativ; bezieht sich r auf die rascheste Schwingungsart, so wird die Correction positiv, wovon wir uns ja auch schon nach einer andern Methode überzeugten.

91. Als ein Beispiel für die Anwendung dieser Formeln können wir den Fall einer gespannten Saite nehmen, deren longitudinale Dichtigkeit ρ nicht ganz constant ist. Wird x von dem einen Ende an gemessen, und ist y die transversale Verschiebung, so wird die Configuration zu irgend einer Zeit t ausgedrückt durch:

$$y = \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \varphi_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots \quad (1),$$

l ist hier die Länge der Saite.

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sind die Normalcoordinaten für $\rho =$ Constans. Obgleich hier nun ρ nicht genau constant ist, so kann doch die Configuration des Systems mit Hülfe derselben Grössen ausgedrückt werden. Da die potentielle Energie irgend einer Configuration dieselbe ist, als wenn $\rho =$ Constans, so ist $\delta V = 0$. Für die kinetische Energie haben wir:

$$T + \delta T = \frac{1}{2}\int_0^l \varrho\left(\dot{\varphi}_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \dot{\varphi}_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 \int_0^l \varrho \sin^2\frac{\pi x}{l}\, dx + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 \int_0^l \varrho \sin^2\frac{2\pi x}{l}\, dx + \cdots$$

$$+ \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \int_0^l \varrho \sin\frac{\pi x}{l} \sin\frac{2\pi x}{l}\, dx + \cdots$$

Wenn ϱ constant wäre, so würden die Producte der Geschwindigkeiten verschwinden, da φ_1, φ_2, etc. unter dieser Voraussetzung die Normalcoordinaten sind. Bei der oben ausgesprochenen Annahme, dass ϱ nicht ganz constant ist, sind die Integralcoefficienten, wenn sie auch in Wirklichkeit nicht ganz verschwinden, doch kleine Grössen. Es sei $\varrho = \varrho_0 + \delta\varrho$; dann ist nach unseren früheren Bezeichnungen:

$$a_r = \frac{1}{2}\, l\varrho_0,\ \delta a_{rr} = \int_0^l \delta\varrho \sin^2\frac{r\pi x}{l}\, dx,$$

$$\delta a_{rs} = \int_0^l \delta\varrho \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{s\pi x}{l}\, dx.$$

Daher wird der Typus der Schwingung ausgedrückt durch:

$$\varphi_s : \varphi_r = \frac{p_r^2}{p_s^2 - p_r^2} \cdot \frac{2}{l\varrho_0} \int_0^l \delta\varrho \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{s\pi x}{l}\, \delta x;$$

oder da:

$$p_r^2 : p_s^2 = r^2 : s^2,$$

$$\varphi_s : \varphi_r = \frac{r^2}{s^2 - r^2} \int_0^l \frac{2\,\delta\varrho}{l\varrho_0} \sin\frac{r\pi x}{l} \sin\frac{s\pi x}{l}\, dx \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir wollen dieses Resultat darauf anwenden, die Verschiebung des Knotenpunktes der zweiten Schwingungsart ($r = 2$), welcher in der Mitte liegen würde, wenn die Saite gleichförmig wäre, zu berechnen. In der Nachbarschaft dieses Punktes ist, wenn $x = \frac{1}{2}\, l + \delta x$ der angenäherte Werth von y:

$$y = \varphi_1 \sin\frac{\pi}{2} + \varphi_2 \sin\frac{2\pi}{2} + \varphi_3 \sin\frac{3\pi}{2} + \cdots$$

$$+ \delta x \left\{\frac{\pi}{l}\varphi_1 \cos\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{l}\varphi_2 \cos\frac{2\pi}{2} + \cdots\right\}$$

$$= \varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_5 - \cdots + \frac{\pi}{l}\delta x\,\{-2\varphi_2 + 2\varphi_4 + \cdots\}$$

Hieraus folgt für $y = 0$:

$$\delta x = \frac{l}{2\pi\varphi_2}\{\varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_5 - \cdots\} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

angenähert, wogegen:

$$\varphi_s : \varphi_2 = \frac{4}{s^2 - 4}\int_0^l \frac{2\,\delta\varrho}{l\varrho_0} \sin\frac{2\pi x}{l} \sin\frac{s\pi x}{l}\,dx \quad . \; . \quad (4).$$

Um die Anwendung dieser Formeln zu zeigen, wollen wir etwa annehmen, dass die Unregelmässigkeit darin besteht, dass ein kleines Gewicht von der Masse $\varrho_0\lambda$ im Punkte $x = \frac{1}{4}\lambda$ auf die Saite aufgelegt ist, wenn auch das Resultat viel leichter direct erhalten werden kann.

Wir haben:

$$\delta x \doteq \frac{2\lambda}{\pi\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{1^2-4} - \frac{2}{3^2-4} - \frac{2}{5^2-4} + \frac{2}{7^2-4} + \cdots\right\},$$

woraus der Werth von δx durch Annäherung berechnet werden kann. Der wirkliche Werth von δx ist indessen sehr einfach. Die Reihe innerhalb der Klammern kann nämlich geschrieben werden:

$$-\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \text{etc.}\right),$$

welche gleich ist:

$$-\int_0^1 \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\,\delta x.$$

Der Werth dieses bestimmten Integrals ist

$$-\pi : 4 \sin\frac{\pi}{4}\ ^{1)}.$$

---

1) Todhunter's Int. Calc. §. 255.

und daraus:

$$\delta x = -\frac{2\lambda}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = -\frac{\lambda}{2},$$

welcher Werth eben so leicht nachgewiesen werden kann, wenn man die Perioden der Schwingungen der beiden Theile der Saite gleichsetzt, nachdem man die Periode des belasteten Theiles annähernd aus der Annahme, dass der Typus nicht geändert wird, berechnet hat.

Als ein Beispiel für die Anwendung der für die Periode geltenden Formel (6) des §. 90 können wir den Fall einer Saite nehmen, welche in ihrem Mittelpunkt ein kleines Gewicht $\varrho_0\lambda$ trägt. Wir haben:

$$a_r = \frac{1}{2}\, l\,\varrho_0;\ \delta a_{rr} = \varrho_0\lambda\, sin^2\frac{r\pi}{2},$$

$$\delta a_{rs} = \varrho_0\lambda\, sin\frac{r\pi}{2}\, sin\frac{s\pi}{2}.$$

Hieraus erhalten wir, wofern P_r der $\lambda = 0$ entsprechende Werth ist, $p_r = P_r$ für den Fall, dass r gerade, und für den Fall, dass r ungerade:

$$p_r^2 = P_r^2 \left\{\frac{1}{1+\frac{2\lambda}{l}} - \Sigma\frac{4r^2}{s^2-r^2}\frac{\lambda^2}{l^2}\right\} \quad . \; . \; . \quad (5),$$

worin die Summation über alle ungeraden Werthe von s mit Ausnahme von r auszudehnen ist. Ist $r = 1$, so haben wir:

$$p_1^2 = P_1^2\left\{1 - \frac{2\lambda}{l} + \frac{4\lambda^2}{l^2} + \Sigma\frac{4}{s^2-1}\frac{\lambda^2}{l^2}\right\}.$$

Nun ist:

$$2\Sigma\frac{1}{s^2-1} = \Sigma\frac{1}{s-1} - \Sigma\frac{1}{s+1},$$

die Werthe von s sind hierin 3, 5, 7, 9 ... Demnach ist:

$$\Sigma\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{4},$$

und:

$$p_1^2 = P_1^2\left\{1 - \frac{2\lambda}{l} + \frac{3\lambda^2}{l^2} + \cdots\right\} \quad . \; . \; . \quad 6).$$

Diese Formel giebt die Höhe des tiefsten Tones mit einer Genauigkeit von der Ordnung des Quadrates von dem Verhältniss $\lambda : l$.

In dem allgemeinen Fall ist der Werth von p_r^2 mit einer Genauigkeit von der ersten Potenz von $\delta \varrho$:

$$p_r^2 = P_r^2 \left\{1 - \frac{\delta a_{rr}}{a_r}\right\}$$

$$= P_r^2 \left\{1 - \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\delta \varrho}{\varrho_0} \sin^2 \frac{r \pi x}{l} \, \delta x\right\} \quad . \; . \quad (7).$$

92. Die Theorieen der Schwingungen werfen viel Licht auf die Entwickelung willkürlicher Functionen in eine Reihe anderer Functionen von bestimmtem Typus. Das bestbekannte Beispiel einer solchen Entwickelung ist die allgemein nach Fourier benannte, in welcher eine willkürliche periodische Function in eine Reihe von harmonischen Functionen aufgelöst ist, deren Perioden Submultiplen von der der gegebenen Function sind. Es ist wohl bekannt, dass die Schwierigkeit dieser Frage darin liegt, den Beweis für die Möglichkeit der Entwickelung zu bringen; ist diese Möglichkeit angenommen, so ist die Bestimmung der Coefficienten leicht genug. Ich möchte jetzt die Aufmerksamkeit des Lesers darauf lenken, dass in diesem und in einer sehr grossen Anzahl von ähnlichen Fällen die Möglichkeit der Entwickelung aus physikalischen Betrachtungen geschlossen werden kann.

Um unsere Ideen zu fixiren, wollen wir die kleinen Schwingungen einer gleichförmigen Saite betrachten, welche zwischen festen Punkten ausgespannt ist. Wir wissen aus der allgemeinen Theorie, dass die ganze Bewegung, welche sie auch sein möge, in eine Reihe von Componenten-Bewegungen zerlegt werden kann, von denen jede eine harmonische Function der Zeit ist und für sich allein existiren kann. Können wir diese Normaltypen auffinden, so werden wir in der Lage sein, die allgemeinste mögliche Schwingung darzustellen durch Verbindung jener, indem wir jeder derselben eine beliebige Amplitude und Phase ertheilen.

Nehmen wir an, dass eine Bewegung harmonisch in Bezug auf die Zeit ist, so erhalten wir zur Bestimmung des Typus eine Gleichung von der Form:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0,$$

woraus hervorgeht, dass die Normalfunctionen sind:

$$y = \sin\frac{\pi x}{l},\ y = \sin\frac{2\pi x}{l},\ y = \sin\frac{3\pi x}{l} \text{ etc.}$$

Wir schliessen daraus, dass die allgemeinste Lage, welche die Saite annehmen kann, sich durch eine Reihe von der Form:

$$A_1 \sin\frac{\pi x}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$

darstellen lässt, welche ein besonderer Fall des Fourier'schen Satzes ist. Es würde keine Schwierigkeit machen, dieses Theorem in seiner allgemeinsten Form zu beweisen.

So weit wurde die Saite als gleichförmig vorausgesetzt. Wir brauchen indess nur eine veränderliche Dichte, oder selbst eine einzelne Belastung in irgend einem Punkte der Saite anzunehmen, um eine vollständig andere Reihen-Entwickelung, deren Möglichkeit aus der dynamischen Theorie geschlossen werden kann, zu erhalten. Es ist unnöthig, hier länger bei diesem Gegenstande zu verweilen, da wir weitere Beispiele in den Capiteln über die Schwingungen von speciellen Systemen, wie z. B. Stäben, Membranen und begrenzten Luftmassen, erhalten werden.

93. Die Bestimmung der Coefficienten aus beliebigen Anfangsbedingungen kann stets leicht durch die Fundamentaleigenschaft der Normalfunctionen ausgeführt werden; es ist wohl zweckmässig, den betreffenden Process hier für Systeme wie Saiten, Stäbe, Membrane, Platten etc., bei welchen nur eine abhängige Variable ζ zu betrachten ist, zu skizziren. Sind $u_1, u_2 \ldots$ die Normalfunctionen und $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ die entsprechenden Coordinaten, so ist:

$$\zeta = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Gleichungen der freien Bewegung sind:

$$\ddot{\varphi}_1 + n_1^2 \varphi_1 = 0, \ \ddot{\varphi}_2 + n_2^2 \varphi_2 = 0 \text{ etc.} \quad . \quad . \quad (2),$$

deren Lösungen lauten:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = A_1 \sin n_1 t + B_1 \cos n_1 t \\ \varphi_2 = A_2 \sin n_2 t + B_2 \cos n_2 t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Anfangswerthe von ζ und $\dot{\zeta}$ sind darnach:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_0 = B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3 + \cdots \\ \dot{\zeta}_0 = n_1 A_1 u_1 + n_2 A_2 u_2 + n_3 A_3 u_3 + \cdots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (4).$$

Die Aufgabe ist also: $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ so zu bestimmen, dass dieselben mit beliebigen Werthen von ζ_0 und $\dot{\zeta}_0$ übereinstimmen.

Ist $\varrho\, dx$ die Masse des Elementes dx, so haben wir aus (1):

$$T = \frac{1}{2}\int \varrho\, \dot{\zeta}^2 dx = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 \int \varrho u_1^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 \int \varrho u_2^2 dx + \cdots + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \int \varrho u_1 u_2 dx + \cdots$$

Der Ausdruck für T in Werthen von $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, etc. kann aber die Producte der verallgemeinerten Normalgeschwindigkeiten nicht enthalten und daher muss jedes Integral verschwinden, welches folgende Form hat:

$$\int \varrho u_r u_s dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Zur Bestimmung von B_r haben wir mithin nur die erste der Gleichungen (4) mit ϱu_r zu multipliciren und über das System zu integriren. Wir erhalten daraus:

$$B_r \int \varrho u_r^2 dx = \int \varrho u_r \zeta_0 dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Auf ähnlichem Wege:

$$n_r A_r \int \varrho u_r^2 dx = \int \varrho u_r \dot{\zeta}_0 dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Der Process ist genau derselbe, ob das Element dx eine Linie, eine Fläche oder ein Volumen ist.

Die durch (5) ausgedrückte Eigenschaft beruht auf der Thatsache, dass die Functionen u sämmtlich Normalfunctionen

sind. Sobald dieses durch die Auflösung einer Differentialgleichung oder sonstwie bekannt ist, können wir diese conjugirte Eigenschaft ohne weiteren Beweis folgern; die Eigenschaft selbst steht aber in sehr inniger Beziehung zu der fundamentalen Variationsgleichung der Bewegung in §. 94.

94 (T. 293). Ist V die potentielle Energie der Deformation, ζ die Verschiebung und ϱ die Dichte des Elementes dx (Linie, Fläche oder Volumen), so giebt die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten direct:

$$\delta V + \int \varrho \ddot{\zeta} \delta \zeta \, dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

In dieser Gleichung ist δV eine symmetrische Function von ζ und $\delta \zeta$, wie man leicht aus dem Ausdruck für V in Werthen der allgemeinen Coordinaten beweisen kann. In der That ist:

$$V = \frac{1}{2} c_{11} \psi_1^2 + \cdots + c_{12} \psi_1 \psi_2 + \cdots$$

$$\delta V = c_{11} \psi_1 \delta \psi_1 + c_{22} \psi_2 \delta \psi_2 + \cdots$$
$$+ c_{12} (\psi_1 \delta \psi_2 + \psi_2 \delta \psi_1) + \cdots$$

Nehmen wir nun etwa an, dass sich ζ auf die Bewegung bezieht, welche einer Normalfunction u_r entspricht, so dass $\ddot{\zeta} + n_r^2 \zeta = 0$, während $\delta \zeta$ mit einer andern Normalfunction u_s identificirt wird. Dann ist:

$$\delta V = n_r^2 \int \varrho \, u_r u_s dx.$$

Nehmen wir andererseits an, wozu wir gleichfalls berechtigt sind, dass sich ζ wie u_s und $\delta \zeta$ wie u_r ändert, so erhalten wir für dieselbe Grösse δV:

$$\delta V = n_s^2 \cdot \int \varrho \, u_r u_s dx;$$

und hieraus:

$$(n_r^2 - n_s^2) \int \varrho \, u_r u_s dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hieraus ergiebt sich die conjugirte Eigenschaft, wenn die durch u_r und u_s dargestellten Bewegungen verschiedene Perioden haben.

Ein gutes Beispiel für den Zusammenhang der beiden Behandlungsmethoden wird sich in dem Capitel über die transversalen Schwingungen von Stäben finden.

95. Professor Stokes[1]) hat aufmerksam gemacht auf ein sehr allgemeines Gesetz, welches diejenigen Theile einer freien Bewegung, welche von den Anfangs-Verschiebungen eines Systems abhängen, das keinen Reibungskräften ausgesetzt ist, mit den Theilen, welche von den Anfangs-Geschwindigkeiten abhängen, verbindet. Wenn einem ruhenden System eine Geschwindigkeit von irgend einem Typus und dann nach Verlauf einer kleinen Zeit die entgegengesetzte Geschwindigkeit mitgetheilt wird, so wird am Ende die Wirkung die sein, dass das System ohne Geschwindigkeit, aber mit einer Verschiebung des entsprechenden Typus, zurückgelassen wird. Wir können hieraus leicht beweisen, dass, um die von den Anfangsverschiebungen abhängige Bewegung abzuleiten von der von den Anfangs-Geschwindigkeiten abhängigen, dass es hierzu nur nöthig ist, nach der Zeit zu differentiren und die willkürlichen Constanten (oder Functionen), welche die Anfangs-Geschwindigkeiten ausdrücken, durch diejenigen zu ersetzen, welche die entsprechenden Anfangs-Verschiebungen ausdrücken.

Wenn daher φ irgend eine Normalcoordinate ist, welche der Gleichung genügt:

$$\ddot{\varphi} + n^2\varphi = 0,$$

so ist die Lösung ausgedrückt durch die Anfangswerthe von φ und $\dot{\varphi}$:

$$\varphi = \varphi_0 \cos nt + \frac{1}{n}\dot{\varphi}_0 \sin nt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1);$$

das erste Glied hierin kann aus dem zweiten nach Stokes Regel erhalten werden.

[1]) Dynamical Theory of Diffraction, Cambridge Trans. Vol. IX.

Fünftes Capitel.

Schwingende Systeme im Allgemeinen.

(Fortsetzung.)

96 (T. 340 und 343). Wenn dissipative Kräfte auf ein System wirken, so ist der Charakter der Bewegung im Allgemeinen complicirter. Wenn nur zwei von den Functionen T, F und V endlich sind, so können wir uns durch eine zweckmässige lineare Transformation von den Producten der Coordinaten frei machen und so die Normaltypen der Bewegung erhalten. In dem vorhergehenden Capitel haben wir den Fall betrachtet, wo $F = 0$ ist. Dieselbe Theorie ist mit auf der Hand liegenden Modificationen auch anzuwenden, wenn $T = 0$ oder $V = 0$. Indess gehören diese Fälle, wenn sie auch in anderen Theilen der Physik, wie Wärme und Electricität, von Wichtigkeit sind, kaum zu unserm gegenwärtigen Gegenstand.

Die Gegenwart von Reibung widerstreitet nicht der Reduction von T und V auf Summen von Quadraten; die dieser Reduction eigene Transformation wird aber im Allgemeinen nicht mit der für die analoge Reduction von F erforderlichen Transformation übereinstimmen. Die allgemeine Gleichung kann dann nur auf die Form:

$$a_1 \ddot{\varphi}_1 + b_{11} \dot{\varphi}_1 + b_{12} \dot{\varphi}_2 + \cdots + c_1 \varphi_1 = \Phi_1 \text{ etc.} \quad . \quad . \quad (1)$$

reducirt werden und nicht auf die einfachere Form, welche bei einem System von einem Grad von Freiheit anwendbar ist, nämlich:

$$a_1 \ddot{\varphi}_1 + b_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 = \Phi_1 \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir können jedoch wählen, welches Paar von Functionen wir reduciren wollen, wenn auch in der Akustik die Wahl stets auf T und V fallen wird.

97. Es giebt indessen eine nicht unwichtige Classe von Fällen, in welchen die obige Reduction für alle drei Functionen möglich ist; die Theorie nimmt dann eine ausserordentliche Einfachheit an. Unter diesen Fällen sind wahrscheinlich die wichtigsten diejenigen, bei welchen F von derselben Form wie T oder V ist. Der erste Fall tritt einem vielfach in Büchern entgegen, wenn der Bewegung jedes Theiles des Systems eine verzögernde Kraft hindernd entgegentritt, die sowohl der Masse wie der Geschwindigkeit dieses Theiles proportional ist. Dieselbe Ausnahmereduction ist möglich, wenn F eine lineare Function von T und V, oder wenn T selbst von derselben Form wie V ist. In jedem dieser Fälle haben die Bewegungsgleichungen dieselbe Form wie für ein System mit einem Grad von Freiheit; die Theorie besitzt dann gewisse Eigenthümlichkeiten, welche dieselbe besonderer Betrachtung werth macht.

Die Bewegungsgleichungen werden auf einmal aus T, F und V erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \ddot{\varphi}_1 + b_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 = \Phi_1, \\ a_2 \ddot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2 + c_2 \varphi_2 = \Phi_2 \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin die Coordinaten von einander getrennt sind.

Für die freie Schwingung haben wir nur $\Phi_1 = 0$ etc. zu setzen; die Lösung hat dann die Form:

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}\varkappa t}\left\{\dot{\varphi}_0 \frac{\sin n't}{n'} + \varphi_0\left(\cos n't + \frac{\varkappa}{2n'}\sin n't\right)\right\} \quad . \quad . \quad (2),$$

worin:

$$\varkappa = \frac{b}{a}, \quad n^2 = \frac{c}{a}, \quad n' = \sqrt{\left(n^2 - \frac{1}{4}\varkappa^2\right)},$$

und φ_0 und $\dot{\varphi}_0$ die Anfangswerthe von φ und $\dot{\varphi}$ sind.

Die ganze Bewegung kann daher in Bewegungscomponenten zerlegt werden, von denen jede der Variation nur einer Normalcoordinate mit der Zeit entspricht. Die Schwingung von jeder dieser einzelnen Bewegungsarten ist der eines Systems

mit nur einem Grad von Freiheit ganz ähnlich. Nach einer gewissen Zeit, die länger oder kürzer je nach dem Betrage der Zerstreuung ist, werden die freien Schwingungen unmerkbar und das System kommt merklich zur Ruhe.

Gleichzeitig mit den freien Schwingungen, aber in vollständiger Unabhängigkeit von denselben, können erzwungene Schwingungen existiren, welche von den Grössen Φ abhängen. Genau wie in dem Falle von einem Grade von Freiheit kann die Lösung von:

$$a\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + c\varphi = \Phi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

geschrieben werden:

$$\varphi = \frac{1}{n'}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\varkappa(t-t')} \sin n'(t-t')\,\Phi\,dt' \quad . \ . \quad (4),$$

worin wie oben:

$$\varkappa = b : a,\ n^2 = c : a,\ n' = \sqrt{\left(n^2 - \frac{1}{4}\varkappa^2\right)}.$$

Um den vollständigen Ausdruck für φ zu erhalten, müssen wir zu dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (4), welcher die Anfangswerthe von φ und $\dot{\varphi}$ verschwinden lässt, die in (2) gegebenen Ausdrücke hinzufügen, welche das zur Zeit t noch Uebriggebliebene von den Anfangswerthen φ_0 und $\dot{\varphi}_0$ darstellen. Wenn keine Reibung vorhanden ist, so reducirt sich der Werth von φ in (4) auf:

$$\varphi = \frac{1}{n}\int_0^t \sin n(t-t')\,\Phi\,dt' \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

98. Die vollkommene Unabhängigkeit der Normalcoordinaten führt zu einem interessanten Theorem, welches die Beziehung zwischen der anfänglichen Störung und der nachfolgenden Bewegung enthält. Denn wenn die Kräfte, welche auf das System wirken, solch einen Charakter haben, dass dieselben keine Arbeit bei der durch $\delta\varphi_1$ angegebenen Verschiebung leisten, dann ist $\Phi_1 = 0$. Keine von solchen Kräften kann, wie lange sie auch andauern mag, irgend eine Wirkung auf die Bewegung φ_1 hervorrufen. Ist diese Bewegung vor-

handen, so kann diese Kraft sie nicht zerstören; ist jene nicht vorhanden, so kann letztere sie nicht erzeugen. Die wichtigste Anwendung dieses Satzes findet bei dem Fall Statt, wo die das System beeinflussenden Kräfte auf einen Knotenpunkt mit der Normalcomponente φ_1 wirken, das ist auf einen Punkt, welchen die in Frage stehende Schwingungscomponente nicht in Bewegung zu setzen strebt. Zwei extreme Fälle solcher Kräfte mögen speciell angeführt werden, 1) wenn die Kraft ein Impuls ist, welcher das System aus der Ruhe aufstört, und 2) wenn die Kraft so lange eingewirkt hat, dass das System unter ihrem Einfluss in einer verschobenen Lage wieder in Ruhe ist. Sobald die Kräfte aufhören zu wirken, treten die natürlichen Schwingungen ein, und würden in Abwesenheit von Reibung unendlich lange andauern. Wir schliessen, dass dieselben, was auch in anderer Hinsicht ihr Charakter sein mag, keine Componente von dem Typus φ_1 enthalten. Dieser Schluss ist beschränkt auf Fälle, in denen für T, F, V eine gleichzeitige Reduction möglich ist, wobei selbstverständlich der Fall des Nichtvorhandenseins der Reibung eingeschlossen ist.

99. Die in §. 97 abgeleiteten Formeln sind auf jede Art von Kraft anwendbar; indessen wird es häufig eintreten, dass wir nur mit den Wirkungen von äusseren Kräften vom harmonischen Typus zu thun haben. Dann können wir mit Vortheil die für solche Kräfte anwendbaren specielleren Formeln benutzen. Indem wir die Normalcoordinaten gebrauchen, haben wir zunächst die Kräfte Φ_1, Φ_2, etc., welche einer jeden Periode entsprechen, zu berechnen und daraus die Werthe der Coordinaten selbst abzuleiten. Ist unter den natürlichen Perioden (die aber mit Ausschluss der Reibung berechnet sind) irgend eine annähernde Uebereinstimmung mit der Periode einer äusseren Kraft vorhanden, so wird die entsprechende Schwingungscomponente ausserordentlich gross, wenn nicht die Kraft selbst bei der vorhergehenden Auflösung in ihre Normalcomponenten sehr viel geschwächt ist. Nehmen wir z. B. an, dass eine transversale Kraft von harmonischem Typus und gegebener

Periode auf einen einzelnen Punkt einer gespannten Saite wirkt. Im Allgemeinen werden sämmtliche Normalschwingungsarten erregt, indessen nicht mit den ihnen eigenen Perioden, sondern mit der Periode der äusseren Kraft; jede Normalcomponente, welche einen Knotenpunkt in dem Angriffspunkte der Kraft hat, wird dagegen nicht erregt. Die Grösse jeder Componente hängt daher von zwei Umständen ab: 1) von der relativen Lage ihrer Knotenpunkte im Vergleich zu dem Punkte, wo die Kraft angreift; und 2) von dem Grade der Uebereinstimmung zwischen ihrer eigenen Periode und der der Kraft. Von Wichtigkeit ist es, daran eingedenk zu sein, dass bei Einwirkung einer einfachen harmonischen Kraft das System im Allgemeinen in allen seinen Schwingungsarten schwingen wird, wenn es auch in einzelnen Fällen häufig genügen mag, nur auf eine von diesen, da dieselbe eine hervorragende Wichtigkeit hat, zu achten.

100. Wenn die Perioden der wirkenden Kräfte sehr gross im Vergleich zu den freien Perioden des Systems sind, so ist manchmal eine Gleichgewichtstheorie angemessen; indessen kann in einem solchen Falle die Lösung im Allgemeinen leichter ohne den Gebrauch der Normalcoordinaten gefunden werden. Einer von diesen Fällen ist Bernoulli's Fluththeorie; dieselbe gründet sich auf die Annahme, dass die freien Perioden der auf der Erde befindlichen Wassermassen klein sind im Verhältniss zu den Perioden der wirkenden Kräfte, in welchem Falle die Trägheit des Wassers ausser Rechnung gelassen werden kann. Diese Annahme ist, was ihr Verhältniss zu der Wirklichkeit betrifft, nur als sehr roh und theilweise anwendbar anzusehen; wir sind demzufolge bei ihr über viele wichtige Punkte bei der Fluth im Dunkeln. Die hauptsächlichsten Kräfte haben eine halbtägige Periode, welche nicht gross genug im Vergleiche mit den in Betracht zu ziehenden natürlichen Perioden ist, um die Vernachlässigung der Trägheit des Wassers zu rechtfertigen. Wenn indessen die Rotation der Erde viel langsamer wäre, so könnte die Gleichgewichtstheorie der Fluth angemessener gewesen sein.

Eine Gleichgewichtstheorie mit angemessenen Correctionen ist manchmal zu gebrauchen, wenn die Periode der äussern Kraft hinreichend gross im Vergleich mit der Mehrzahl der natürlichen Perioden eines Systems ist, aber nicht so im Vergleich mit ein oder zwei dieser natürlichen Perioden. Es wird hinreichen, den Fall zu nehmen, wo keine Reibung vorhanden ist. Wir nehmen an, dass in der Gleichung:

$$a\ddot{\varphi} + c\varphi = \Phi \text{ oder } \ddot{\varphi} + n^2\varphi = \frac{1}{a}\Phi$$

die äussere Kraft mit $\cos pt$ veränderlich ist. Dann ist:

$$\varphi = \Phi : a(n^2 - p^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Gleichgewichtstheorie vernachlässigt p^2 im Vergleich zu n^2 und setzt:

$$\varphi = \Phi : an^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nehmen wir nun an, dass diese Rechnungsweise stets gerechtfertigt ist mit einer Ausnahme, bei der einzelnen Normalcoordinate φ_1 nämlich nicht. Wir haben dann nur zu dem Resultate der Gleichgewichtstheorie die Differenz zwischen dem wirklichen Resultat und dem bei jener angenommenen Resultat hinzuzufügen; das giebt:

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_1}{a_1(n_1^2 - p^2)} - \frac{\Phi_1}{a_1 n_1^2} = \frac{p^2}{n_1^2(n_1^2 - p^2)} \cdot \frac{\Phi_1}{a_1} \quad . \quad . \quad (3).$$

Der andere extreme Fall muss auch erwähnt werden. Wenn die erzwungenen Schwingungen ausserordentlich rasch sind, so können dieselben nahezu unabhängig von der potentiellen Energie des Systems werden. Anstatt dass wir p^2 im Vergleich zu n^2 vernachlässigen, haben wir dann n^2 zu vernachlässigen im Vergleich zu p^2; das giebt:

$$\varphi = -\Phi : ap^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wenn ein oder zwei Coordinaten vorhanden sind, auf welche diese Behandlungsweise nicht anwendbar ist, können wir das aus der Hypothese, dass V ganz zu vernachlässigen ist, berechnete Resultat durch Correctionen für diese besonderen Coordinaten ergänzen.

101. Bevor wir zu der allgemeinen Theorie der Schwingungen von dissipativen Systemen übergehen, wird es gut sein,

einige Eigenthümlichkeiten der freien Schwingungen continuirlicher Systeme, welche einer in einem einzigen Punkt angreifenden Kraft ausgesetzt sind, aufzusuchen. Unter den Voraussetzungen und Benennungen des §. 93 wird die Configuration zu irgend einer Zeit bestimmt durch:

$$\zeta = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \varphi_3 u_3 + \ldots \ldots \quad (1),$$

worin die Normalcoordinaten Gleichungen von der Form:

$$a_r \ddot{\varphi}_r + c_r \varphi_r = \Phi_r \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Genüge leisten.

Nehmen wir nun an, dass das System durch eine im Punkte Q angebrachte Kraft in Ruhe gehalten wird. Der Werth von Φ_r wird durch die Ueberlegung bestimmt, dass $\Phi_r \delta \varphi_r$ die Arbeit darstellt, welche von den äusseren Kräften auf das System während der hypothetischen Verschiebung $\delta \zeta = \delta \varphi_r u_r$ geleistet wird; das ist also:

$$\delta \varphi_r \int Z u_r dx.$$

Daher ist:

$$\Phi_r = \int Z u_r dx = u_r(Q) \int Z dx;$$

so dass im Anfang nach (2):

$$c_r \varphi_r = u_r(Q) \int Z dx \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Wenn man das System von dieser Configuration zur Zeit $t = 0$ ausgehen lässt, so hat man zu jeder nachfolgenden Zeit t:

$$\varphi_r = \cos n_r t \, \frac{u_r(Q) \int Z dx}{c_r}$$

$$= \cos n_r t \, \frac{u_r(Q) \int Z dx}{n_r^2 \int \varrho u_r^2 dx} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und in dem Punkte P:

$$\zeta = \Sigma \cos n_r t \, \frac{u_r(P)\, u_r(Q) \int Z dx}{n_r^2 \int \varrho u_r^2 dx} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

In besonderen Punkten verschwinden $u_r(P)$ und $u_r(Q)$, aber im Ganzen convergirt weder noch divergirt mit r der Ausdruck:

$$u_r(P)\,u_r(Q) : \int \varrho\, u_r^2\, dx.$$

Die Reihe für ζ convergirt daher mit n_r^{-2}.

Nehmen wir anderenseits an, dass das System aus der Gleichgewichtsconfiguration durch einen Impuls aufgestört wird. In diesem Falle ist anfangs:

$$a_r\,\dot{\varphi}_r = \int \Phi_r dt = u_r(Q) \int Z_1\, dx,$$

woraus zur Zeit t:

$$\varphi_r = \frac{\sin n_r t}{a_r n_r} \cdot u_r(Q) \cdot \int Z_1\, dx$$

$$= \frac{\sin n_r t \cdot u_r(Q)}{n_r \int \varrho\, u^{r2} dx} \int Z_1\, dx \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

Das giebt:

$$\zeta = \Sigma \sin n_r t \frac{u_r(P)\, u_r(Q) \int Z_1\, dx}{n_r \int \varrho\, u_r^2\, dx} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Diese Gleichung zeigt, dass in diesem Falle die Reihe mit n_r^{-1}, also langsamer wie in dem vorhergehenden Falle, convergirt.

In beiden Fällen ist es bemerkenswerth, dass der Werth von ζ symmetrisch in Bezug auf P und Q ist, ein Beweis dafür, dass die Verschiebung des Punktes P, wenn die Kraft oder der Impuls in Q angebracht wird, dieselbe sein würde wie die des Punktes Q, wenn die Kraft oder der Impuls in P angebracht wäre. Das ist ein Beispiel eines sehr allgemeinen Problems der Reciprocität, welches wir gleich ausführlicher durchnehmen wollen.

Als einen dritten Fall können wir annehmen, dass der Körper aus der Ruhe aufgestört wird dadurch, dass auf ihn eine Kraft wirkt, welche über seine Länge, Fläche oder Volumen gleichförmig vertheilt ist. Wir finden dann leicht:

$$\zeta = \Sigma \cos n_r t \frac{u_r(P) \, . \, Z \, . \int u_r \, dx}{n_r^2 \int \varrho \, u_r^2 \, dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Reihe für ζ ist dann convergenter, als wenn die Kraft auf einen einzelnen Punkt concentrirt wäre.

Genau auf demselben Wege könnten wir den Fall eines continuirlichen Körpers behandeln, dessen Bewegung eine dissipative ist, vorausgesetzt, dass die drei Functionen T, F, V gleichzeitig reducirbar sind. Es wird aber nicht nöthig sein, die Formeln hinzuschreiben.

102. Wenn die drei mechanischen Functionen irgend eines Systems nicht gleichzeitig reducirbar sind, so sind die natürlichen Schwingungen (wie schon bemerkt wurde) in ihrem Charakter complicirter. Wenn indessen die Dissipation gering ist, so bleibt die Reductionsmethode noch anwendbar; diese Classe von Fällen bildet, ausser dass sie wegen ihrer selbst von einiger Wichtigkeit ist, eine gute Einleitung zu der allgemeineren Theorie. Wir nehmen dann an, dass T und V als Summe von Quadraten ausgedrückt sind:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} a_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{\varphi}_2^2 + \cdots \\ V &= \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \varphi_2^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

während F noch in der allgemeineren Form auftritt:

$$F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{\varphi}_2^2 + \cdots + b_{12} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \quad . \quad (2).$$

Die Bewegungsgleichungen werden demgemäss:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \ddot{\varphi}_1 + b_{11} \dot{\varphi}_1 + b_{12} \dot{\varphi}_2 + b_{13} \dot{\varphi}_3 + \cdots + c_1 \varphi_1 &= 0 \\ a_2 \ddot{\varphi}_2 + b_{21} \dot{\varphi}_1 + b_{22} \dot{\varphi}_2 + b_{23} \dot{\varphi}_3 + \cdots + c_2 \varphi_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hierin sind die Coefficienten b_{11}, b_{12} etc. als klein anzunehmen. Wenn keine Reibung vorhanden wäre, so würde dem obigen Systeme Genüge geleistet werden, wenn man annimmt, dass eine Coordinate φ_r zweckmässig variirt, während

die anderen verschwinden. In dem wirklich vorliegenden Falle giebt es eine entsprechende Lösung, in welcher der Werth von irgend einer andern Coordinate φ_s klein ist im Vergleich zu φ_r.

Vernachlässigen wir daher die Glieder zweiter Ordnung, so wird die *r* te Gleichung:

$$a_r \ddot{\varphi}_r + b_{rr} \dot{\varphi}_r + c_r \varphi_r = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (4).$$

Aus derselben schliessen wir, dass φ_r sich annähernd so ändert, als wäre in dem Schwingungstypus durch den Hinzutritt der Reibung keine Aenderung erfolgt. Wenn φ_r sich wie $e^{p_r t}$ ändert, so haben wir zur Bestimmung von p_r:

$$a_r p_r^2 + b_{rr} p_r + c_r = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (5).$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind complex; der reelle Theil ist indessen klein im Vergleich zu dem imaginären Theil.

Aus der *s* ten Gleichung erhalten wir, wenn wir die Annahme einführen, dass alle Coordinaten sich wie $e^{p_r t}$ ändern:

$$(p_r^2 a_s + c_s) \varphi_s + b_{rs} p_r \varphi_r = 0,$$

wobei die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt sind. Hieraus ergiebt sich:

$$\varphi_s : \varphi_r = -\frac{b_{rs} p_r}{p_r^2 a_s + c_s} = \frac{b_{rs} p_r}{a_s (p_s^2 - p_r^2)} \quad \dots \quad (6).$$

Diese Gleichung bestimmt annähernd den geänderten Schwingungstypus. Da der Hauptbestandtheil von p_r imaginär ist, so sehen wir, dass die Coordinaten φ_s annähernd sich in derselben Phase befinden, dass aber ihre Phase um eine viertel Periode von der Phase von φ_r differirt. Wenn also die Function F sich nicht auf eine Summe von Quadraten reducirt, so ist der Charakter der elementaren Schwingungsarten weniger einfach wie sonst, und die verschiedenen Theile des Systems befinden sich nicht länger mehr gleichzeitig in derselben Phase.

Wir bewiesen oben, dass, wenn die Reibung klein ist, der Werth von p_r annähernd berechnet werden kann, ohne dass man auf die Aenderung des Typus Rücksicht nimmt. Mit Hülfe der Gleichung (6) können wir aber eine noch grössere Annähe-

rung erhalten, in welcher noch die Quadrate der kleinen Grössen auftreten. Die $r$te Gleichung (3) giebt:

$$a_r p_r^2 + c_r + b_{rr} p_r + \Sigma \frac{p_r^2 b^2_{rs}}{a_s(p_s^2 - p_r^2)} = 0 \quad . \quad . \quad (7).$$

Da der vorherrschende Bestandtheil der unter dem Summenzeichen zusammengefassten Ausdrücke reell ist, so hat die Correction auf den reellen Theil von p_r, von welchem die Grösse der Abnahme abhängt, keinen Einfluss.

103. Wir kehren nun zu der Betrachtung der allgemeinen Gleichungen des §. 84 zurück.

Sind ψ_1, ψ_2, etc. die Coordinaten und Ψ_1, Ψ_2, etc. die Kräfte, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} e_{11}\psi_1 + e_{12}\psi_2 + \cdots &= \Psi_1 \\ e_{21}\psi_1 + e_{22}\psi_2 + \cdots &= \Psi_2 \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin:

$$e_{rs} = a_{rs}D^2 + b_{rs}D + c_{rs} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für die freien Schwingungen verschwinden Ψ_1, etc. Ist ∇ die Determinante:

$$\nabla = \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & \ldots \\ e_{21}, & e_{22}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

dann ist das Resultat der Elimination aller Coordinaten mit Ausnahme einer einzigen aus (1):

$$\nabla \psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da nun ∇ ungerade Potenzen von D enthält, so treten die $2m$ Wurzeln der Gleichung $\nabla = 0$ nicht länger mehr in gleichen positiven und negativen Paaren auf, sondern enthalten sowohl einen positiven wie einen imaginären Theil. Das vollständige Integral kann indessen noch geschrieben werden:

$$\psi = Ae^{\mu_1 t} + A'e^{\mu_1' t} + Be^{\mu_2 t} + B'e^{\mu_2' t} + \quad . \quad . \quad (5),$$

worin die conjugirten Wurzelpaare sind μ_1, μ_1'; μ_2, μ_2'; etc. Jeder Wurzel entsprechend giebt es eine particuläre Lösung, wie:

$$\psi_1 = A_1 e^{\mu_1 t}, \; \psi_2 = A_2 e^{\mu_1 t}, \; \psi_3 = A_3 e^{\mu_1 t} \text{ etc.,}$$

n welchen die Verhältnisse $A_1 : A_2 : A_3 \ldots$ durch die Bewegungsgleichungen bestimmt sind und nur der absolute Werth irgend einer dieser Grössen willkürlich bleibt. In dem vorliegenden Falle (wo ∇ ungerade Potenzen von D enthält) sind indessen diese Verhältnisse im Allgemeinen nicht reell, und daher sind die Variationen der Coordinaten ψ_1, ψ_2 etc. in der Phase nicht synchron. Setzen wir $\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\mu_1' = \alpha_1 - i\beta_1$ etc., so sehen wir, dass keine der Grössen α positiv sein kann, weil andernfalls die Energie der Bewegung mit der Zeit wachsen würde, was, wie wir wissen, nicht geschehen kann.

Ueber die freien Schwingungen eines Systems im Allgemeinen ist nun genug gesagt worden. Jede weitere Illustration, welche noch erforderlich ist, wird sich durch die Discussion des Falles von zwei Graden von Freiheit ergeben (§. 112), sowie bei den Schwingungen von Saiten und anderen speciellen Körpern, mit welchen wir uns bald beschäftigen werden. Wir nehmen jetzt die Gleichungen (1) wieder vor in der Absicht, die Natur der erzwungenen Schwingungen näher zu untersuchen.

104. Um aus den Gleichungen alle Coordinaten mit Ausnahme einer (ψ_1) zu eliminiren, multipliciren wir dieselben der Reihe nach mit den Unterdeterminanten:

$$\frac{d\nabla}{de_{11}},\ \frac{d\nabla}{de_{21}},\ \frac{d\nabla}{de_{31}}\ \text{etc.},$$

und addiren die Resultate; in gleicher Weise verfahren wir mit den übrigen Coordinaten. Wir erhalten daraus folgendes Gleichungssystem, das dem ursprünglichen Gleichungssystem äquivalent ist:

$$\left.\begin{aligned}
\nabla\psi_1 &= \frac{d\nabla}{de_{11}}\Psi_1 + \frac{d\nabla}{de_{21}}\Psi_2 + \frac{d\nabla}{de_{31}}\Psi_3 + \cdots \\
\nabla\psi_2 &= \frac{d\nabla}{de_{12}}\Psi_1 + \frac{d\nabla}{de_{22}}\Psi_2 + \frac{d\nabla}{de_{32}}\Psi_3 + \cdots \\
\nabla\psi_3 &= \frac{d\nabla}{de_{13}}\Psi_1 + \frac{d\nabla}{de_{23}}\Psi_2 + \frac{d\nabla}{de_{33}}\Psi_3 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (1).$$

In diesen Gleichungen sind die Differentiationen von ∇ so auszuführen, dass man Rücksicht nimmt auf die Gleichheit, welche zwischen e_s und e_{sr} besteht.

Die Kräfte Ψ_1, Ψ_2, etc. sind, wie sie auch sonst sein mögen, natürlich der Bedingung unterworfen, dass sie nicht eine so grosse Verschiebung oder Bewegung hervorrufen, dass die Quadrate der kleinen Grössen merkbar werden. Wenn, wie es oft der Fall ist, die wirkenden Kräfte aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine in Bezug auf die Zeit constant, der andere aber periodisch ist, so ist es zweckmässig, in der Vorstellung die beiden Arten von Wirkungen, welche hervorgebracht werden, von einander zu trennen. Die den constanten Kräften zu verdankende Wirkung ist genau dieselbe, als wenn diese allein thätig wären; sie wird als Lösung eines statischen Problems gefunden. Es wird daher im Allgemeinen hinreichen, die Kräfte periodisch anzunehmen, da jede constante Kraft, wie etwa die Schwerkraft, nur bewirkt, dass die Configuration, um welche die Schwingungen eigentlich geschehen, geändert wird. Wir können uns daher ohne irgend einen wirklichen Verlust an Allgemeinheit beschränken auf periodische Kräfte, und demnach nach Fourier's Theorem auf harmonische Kräfte.

Als Ausdruck für Ψ_1, etc. können wir daher Kreisfunctionen der Zeit annehmen; wie wir uns aber im Verlaufe dieses Buches häufig überzeugen können, ist es oft zweckmässiger, eine imaginäre Exponentialfunction zu benutzen, wie etwa Ee^{ipt}, worin E eine Constante ist, welche complex sein kann. Wenn die entsprechende symbolische Lösung erhalten ist, so können ihre reellen und imaginären Theile getrennt werden und gehören respective zu den reellen und imaginären Theilen der gegebenen Grössen. Auf diese Weise gewinnt die Berechnung sehr an Kürze, um so mehr, da die Differentiationen und Phasenänderungen nur dadurch ausgedrückt werden, dass die complexen Coefficienten geändert werden, ohne dass sich die Form der Function ändert. Wir schreiben daher:

$$\Psi_1 = E_1 e^{ipt}, \; \Psi_2 = E_2 e^{ipt}, \text{ etc.}$$

Die Unterdeterminanten von dem Typus $\frac{d\nabla}{de_{rs}}$ sind rationale ganze Functionen des Symbols D; nach der Bedeutung von D bedeutet die Multiplication jener mit Ψ_1 etc. eine Operation mit Ψ_1 nach folgendem Gesetz:

$$f(D)e^{ipt} = f(ip)e^{ipt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Unsere Gleichungen nehmen daher folgende Form an:

$$\nabla\psi_1 = A_1 e^{ipt},\ \nabla\psi_2 = A_2 e^{ipt},\ \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin A_1, A_2 etc. gewisse complexe Constanten sind. Die symbolischen Lösungen werden:

$$\psi_1 = A_1 \nabla^{-1} e^{ipt},\ \text{etc.},$$

oder nach (2):

$$\psi_1 = A_1 \frac{e^{ipt}}{\nabla(ip)},\ \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin $\nabla(ip)$ das Resultat der Substitution von ip für D in ∇ bedeutet.

Betrachten wir zunächst den Fall eines Systems, das von Reibung frei ist. ∇ und seine Differentialquotienten sind dann gerade Functionen von D, so dass $\nabla(ip)$ reell ist. Ziehen wir den imaginären Theil der Lösung heraus, indem wir $R_1 e^{i\theta_1}$ für A_1 etc. schreiben, so erhalten wir:

$$\psi_1 = \frac{R_1}{\nabla(ip)} \cos(pt + \theta_1)\ \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Nehmen wir an, dass die Kräfte Ψ_1 etc. (bei mehr wie einer allgemeinen Componente) alle dieselbe Phase haben, so können dieselben folgendermaassen ausgedrückt werden:

$$E_1 \cos(pt + \alpha),\ E_2 \cos(pt + \alpha),\ \text{etc.}$$

Dann stimmen, wie leicht zu sehen ist, die Coordinaten selbst in Bezug auf die Phase mit den Kräften überein:

$$\psi_1 = \frac{R_1}{\nabla(ip)} \cos(pt + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Amplituden der Schwingungen hängen, ausser von anderen Dingen, auch ab von der Grösse von $\nabla(ip)$. Nun ist, wenn die Periode der Kräfte dieselbe, wie eine von denen ist, welche

den freien Schwingungen zukommt, $\nabla(ip) = 0$; die Amplitude wird dann unendlich gross. Dies ist natürlich gerade derjenige Fall, bei welchem es wesentlich ist, die Betrachtung der Reibung einzuführen, von welcher kein natürliches System in Wirklichkeit frei ist.

Wenn Reibung vorhanden ist, so wird $\nabla(ip)$ complex; es kann diese Grösse aber in zwei Theile getheilt werden, — einen reellen und einen rein imaginären, von denen der letztere ganz von der Reibung abhängt. Setzen wir daher:

$$\nabla(ip) = \nabla_1(ip) + ip\,\nabla_2(ip) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

so sind ∇_1 und ∇_2 gerade Functionen von ip und daher reell. Wenn, wie vorher, $A_1 = R_1 e^{i\theta_1}$, so nimmt unsere Lösung die Form an:

$$\psi_1 = \frac{R_1 e^{i\theta_1} e^{i\gamma} e^{ipt}}{\{|\nabla_1(ip)|^2 + p^2 |\nabla_2(ip)|^2\}^{1/2}},$$

oder, indem wir die imaginären Theile herausziehen:

$$\psi_1 = \frac{R_1 \cos(pt + \theta_1 + \gamma)}{\{|\nabla_1(ip)|^2 + p^2 |\nabla_2(ip)|^2\}^{1/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

worin:

$$\operatorname{tang}\gamma = -\frac{p\nabla_2(ip)}{\nabla_1(ip)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Wir sagten, dass $\nabla_2(ip)$ ganz von der Reibung abhängt; es ist aber andererseits nicht richtig, dass $\nabla_1(ip)$ genau denselben Werth hat, als wenn keine Reibung vorhanden wäre. Indessen ist dies annähernd der Fall, wenn die Reibung klein ist; weil jeder Theil von $\nabla(ip)$, welcher von der ersten Potenz des Reibungscoefficienten abhängt, nothwendiger Weise imaginär ist. Wo nur immer eine Coincidenz zwischen der Periode der Kraft und der von einer der freien Schwingungen eintritt, da verschwindet $\nabla_1(ip)$. Es ist sodann $\operatorname{tang}\gamma = -\infty$ und daher:

$$\psi_1 = \frac{R_1 \sin(pt + \theta_1)}{p\nabla_2(ip)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Diese Gleichung giebt eine Schwingung mit grosser Amplitude an, welche nur durch die Reibung begrenzt wird.

Unter der Annahme geringer Reibung ist θ_1 im Allgemeinen klein, und ebenso γ, ausgenommen in dem Falle einer angenäherten Gleichheit der Perioden. Mit gewissen Ausnahmen hat die Bewegung desshalb nahezu dieselbe (oder entgegengesetzte) Phase wie die Kraft, welche jene erregt.

Wenn eine durch einen harmonischen Ausdruck definirte Kraft auf ein System wirkt, so ist die resultirende Bewegung stets harmonisch und behält die ursprüngliche Periode, immer vorausgesetzt, dass die Quadrate der Verschiebungen und Geschwindigkeiten vernachlässigt werden können. Dieses wichtige Princip wurde von Laplace aufgestellt und von ihm auf die Fluththeorie angewandt. Seine grosse Allgemeinheit wurde ebenso von Sir John Herschel erkannt, dem wir einen förmlichen Beweis seiner Richtigkeit verdanken [1]).

Wenn die Kraft keine harmonische Function der Zeit ist, so sind die Schwingungstypen in verschiedenen Theilen des Systems im Allgemeinen jede von einander und von der der Kraft verschieden. Die harmonischen Functionen sind also die einzigen, bei welchen der Typus ungeändert bleibt; und dieses ist, wie in der Einleitung bemerkt wurde, ein zwingender Grund für die Annahme, dass dieselben einfachen Tönen entsprechen.

105. Wir gehen nun zu einer etwas andern Art von erzwungener Bewegung über, wo nicht, wie in dem Vorhergehenden, Kräfte, sondern nothwendige Bewegungen vorgeschrieben sind.

Setzen wir voraus, dass die Coordinaten $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_r$ gegebene Functionen der Zeit sind, während die Kräfte der übrig bleibenden Typen $\Psi_{r+1}, \Psi_{r+2}, \ldots \Psi_m$ verschwinden, so trennen sich die Bewegungsgleichungen von selbst in zwei Gruppen, nämlich:

---

[1]) Encyc. Metrop. art. 323. Ebenfalls: Outlines of Astronomy §. 650.

$$\left.\begin{array}{l} e_{11}\psi_1 + e_{12}\psi_2 + \cdots + e_{1m}\psi_m = \Psi_1 \\ e_{21}\psi_1 + e_{22}\psi_2 + \cdots + e_{2m}\psi_m = \Psi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{r1}\psi_1 + e_{r2}\psi_2 + \cdots + e_{rm}\psi_m = \Psi_r \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (1);$$

und

$$\left.\begin{array}{l} e_{r+1,1}\psi_1 + e_{r+1,2}\psi_2 + \cdots + e_{r+1,m}\psi_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{m1}\psi_1 + e_{m2}\psi_2 + \cdots + e_{mm}\psi_m = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad (2).$$

In jeder der $m - r$ Gleichungen der letzten Gruppe sind die ersten r Glieder bekannte explicite Functionen der Zeit und haben dieselbe Wirkung, wie bekannte Kräfte, welche auf das System wirken. Die Gleichungen dieser Gruppe sind daher hinreichend, um die unbekannten Grössen zu bestimmen; hierauf können, wenn es nöthig ist, die Kräfte, welche dazu erforderlich sind, die vorgeschriebene Bewegung aufrecht zu erhalten, aus der ersten Gruppe bestimmt werden. Es liegt auf der Hand, dass zwischen den beiden Classen von Problemen über erzwungene Schwingungen kein wesentlicher Unterschied besteht.

106. Die Bewegung eines reibungslosen Systems, das in Folge von vorgeschriebenen Variationen einiger der Coordinaten einfache harmonische Schwingungen ausführt, besitzt eine Eigenthümlichkeit, welche der in §§. 74, 79 betrachteten analog ist. Es möge sein:

$$\psi_1 = A_1 \cos pt, \quad \psi_2 = A_2 \cos pt, \text{ etc.,}$$

in welchen Gleichungen die Grössen $A_1, \ldots A_r$ als gegeben betrachtet, während die übrigbleibenden als willkürlich genommen werden. Wir finden aus den Ausdrücken für T und V, §. 82:

$$\begin{aligned} 2\,(T + V) = {} & \frac{1}{2}(c_{11} + p^2 a_{11}) A_1^2 + \cdots \\ & + (c_{12} + p^2 a_{12}) A_1 A_2 + \cdots \\ & + \Big\{ \frac{1}{2}(c_{11} - p^2 a_{11}) A_1^2 + \cdots \\ & \quad + (c_{12} - p^2 a_{12}) A_1 A_2 + \cdots \Big\} \cos 2pt \end{aligned}$$

Hieraus sehen wir, dass die Bewegungsgleichungen die Bedingung ausdrücken, dass E, der veränderliche Theil von $T + V$, welcher proportional ist:

$$\frac{1}{2}(c_{11} - p^2 a_{11}) A_1^2 + \cdots + (c_{12} - p^2 a_{12}) A_1 A_2 + \ldots \quad (1),$$

für alle Variationen der Grössen $A_{r+1}, \cdots A_m$ einen stationären Werth hat. Es sei p'^2 der Werth von p^2, welcher dem System natürlich ist, wenn dasselbe bei der durch die Verhältnisse:

$$A_1 : A_2 \ldots A_r : A_{r+1} \ldots A_m;$$

definirten Beschränkung (für die Coordinaten) schwingt, dann ist:

$$p'^2 = \left\{\frac{1}{2} c_{11} A_1^2 + \cdots + c_{12} A_1 A_2 + \cdots\right\}$$
$$: \left\{\frac{1}{2} a_{11} A_1^2 + \cdots + a_{12} A_1 A_2 + \cdots\right\},$$

so dass:

$$E = (p'^2 - p^2)\left\{\frac{1}{2} a_{11} A_1^2 + \cdots + a_{12} A_1 A_2 + \cdots\right\} \quad . (2).$$

Hieraus sehen wir Folgendes. Wenn p^2 unbedingt kleiner wie p'^2 ist, das ist, wenn die vorgeschriebene Periode grösser wie irgend eine von denen ist, welche dem System bei der partiellen durch:

$$A_1 : A_2 \ldots A_r$$

dargestellten Gebundenheit natürlich sind, dann ist E nothwendiger Weise positiv und der stationäre Werth — es kann nur ein einziger vorhanden sein — ist ein absolutes Minimum. Aus einem ähnlichen Grunde ist E, wenn die vorgeschriebene Periode kleiner wie irgend eine der dem partiell gebundenen System natürlichen ist, algebraisch ein absolutes Maximum, aber arithmetrisch ein absolutes Minimum. Wenn aber p^2 innerhalb der möglichen Werthe von p'^2 liegt, so kann E positiv oder negativ sein; der wirkliche Werth ist dann weder der grösstmöglichste noch der kleinstmöglichste. Wenn überhaupt eine natürliche Schwingung mit den auferlegten Bedingungen vereinbar ist, so wird sie die angenommene Schwingung sein. Der variable Theil von $T + V$ ist dann gleich Null.

Der Zweckmässigkeit halber haben wir die beiden grossen Classen von erzwungenen Schwingungen und freien Schwingungen getrennt betrachtet; es ist aber natürlich nichts vorhanden, was ihr Zusammenbestehen verhindert. Nach Verlauf eines hinreichend grossen Zeitintervalls verschwinden die freien Schwingungen stets, wie klein auch die Reibung sein mag. Der Fall, wo absolut keine Reibung vorhanden ist, ist rein ideal.

Es ist indessen eine Vorsicht vorhanden, deren Beachtung bei dem Falle, wo gegebene Bewegungen dem System aufgezwungen werden, nicht überflüssig ist. Nehmen wir wie vorhin an, dass die Coordinaten $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_r$ gegeben sind. Unter den freien Schwingungen, deren Vorhandensein oder Nichtvorhandensein in so weit gleichgültig ist, als die erzwungene Bewegung betrachtet wird, muss man dann diejenigen verstehen, deren das System fähig ist, wenn die Coordinaten $\psi_1, \ldots \psi_r$ nicht von Null variiren können. Um eine Veränderung derselben zu hindern, müssen Kräfte von den entsprechenden Typen eingeführt werden, so dass von einem gewissen Gesichtspunkte aus die in Frage stehende Bewegung als erzwungen angesehen werden kann. Die hinzugefügten Kräfte haben aber nur die Natur einer Gebundenheit; ihre Wirkung ist dieselbe wie eine Begrenzung der Freiheit der Bewegung.

107. Sehr bemerkenswerthe reciproke Relationen bestehen zwischen den Kräften und Bewegungen von verschiedenen Typen; Relationen, welche als Ausdehnungen der entsprechenden Theoreme für Systeme, in denen nur V oder T zu betrachten waren (§. 72 und §§. 77, 78), angesehen werden können. Setzen wir voraus, dass alle Kraftcomponenten, mit Ausnahme von zweien — Ψ_1 und Ψ_2 — gleich Null sind, so erhalten wir aus §. 104:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \psi_1 &= \frac{d\nabla}{de_{11}} \Psi_1 + \frac{d\nabla}{de_{21}} \Psi_2 \\ \nabla \psi_2 &= \frac{d\nabla}{de_{12}} \Psi_1 + \frac{d\nabla}{de_{22}} \Psi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Wir betrachten nun zwei Bewegungsarten für dasselbe System; zuerst, wenn Ψ_2 verschwindet, und zweitens (mit accentuirten Buchstaben), wenn $\Psi_1' = 0$ ist. Ist $\Psi_2 = 0$, so haben wir:

$$\psi_2 = \nabla^{-1} \frac{d\nabla}{de_{12}} \Psi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Aehnlich wenn $\Psi_1' = 0$:

$$\psi_1' = \nabla^{-1} \frac{d\nabla}{de_{21}} \Psi_2' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

In diesen Gleichungen sind ∇ und seine Differentialquotienten rationale ganze Functionen des Symbols D; da in jedem Falle $e_{rs} = e_{sr}$, so ist ∇ eine symmetrische Determinante und daher:

$$\frac{d\nabla}{de_{rs}} = \frac{d\nabla}{de_{sr}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Hieraus sehen wir, dass wenn eine Kraft Ψ_1 auf das System wirkt, die Coordinate ψ_2 mit derselben in derselben Weise zusammenhängt, wie die Coordinate ψ_1' mit der Kraft Ψ_2' zusammenhängt, wenn letztere Kraft als alleinwirkend angenommen wird.

Ausser der hier betrachteten Bewegung können noch freie Schwingungen existiren, welche von einer Störung abhängen, die schon vor dem Zeitmoment vorhanden war, nach welchem alle neuen Störungsquellen in Ψ eingeschlossen sind; diese Schwingungen sind aber selbst Wirkungen von Kräften, welche vorher wirkten. Wie klein auch die Dissipation sein mag, es muss ein Zeitintervall vorhanden sein, nach welchem die freien Schwingungen vergangen sind und jenseits dessen es unnöthig ist, bei der weiteren Betrachtung Rücksicht zu nehmen auf Kräfte, welche früher auf das System gewirkt haben. Wenn wir daher in Ψ alle Kräfte einschliessen, welche seit einer hinreichend langen Zeit wirken, so sind keine unabhängigen Schwingungen zu betrachten; auf diese Weise kann das Theorem auf Fälle ausgedehnt werden, welche auf den ersten Blick nicht in seinen Wirkungskreis zu fallen scheinen. Nehmen wir z. B. an, dass das System sich in seiner Gleichgewichtslage in

Ruhe befindet und dass dann eine Kraft der ersten Art anfängt zu wirken, welche allmälig von Null bis zu einem endlichen Werthe Ψ_1, bei welchem sie aufhört zu wachsen, an Grösse zunimmt. Wenn jetzt in einem bestimmten Zeitmoment die Kraft plötzlich zerstört wird und später stets Null bleibt, so werden freie Schwingungen des Systems eintreten und so lange andauern, bis sie durch Reibung zerstört sind. Zu jeder Zeit, welche später wie der letzt erwähnte Zeitmoment ist, hat die Coordinate ψ_2 einen von der Zeit abhängigen Werth, welcher proportional Ψ_1 ist. Der obige Satz gestattet uns die Behauptung, dass dieser Werth ψ_2 dieselbe Beziehung zu Ψ_1 besitzt, welche zu gleicher Zeit ψ_1' zu Ψ_2' besessen hätte, wenn die ursprüngliche Ursache für die Schwingung eine Kraft vom zweiten Typus gewesen wäre, welche allmälig von Null auf Ψ_2' angewachsen und dann plötzlich in dem oben genannten bestimmten Zeitmoment verschwunden wäre. Wir haben schon im §. 101 ein Beispiel hiervon gehabt; ein gleiches Resultat erhält man, wenn die Ursache der ursprünglichen Störung ein Impuls oder, wie bei Klaviersaiten, eine veränderliche Kraft von endlicher, wenn auch kurzer, Dauer ist. In solchen Anwendungen unseres Satzes erhalten wir Resultate, die sich auf freie Schwingungen beziehen, welche als die übrig gebliebene Wirkung von Kräften angesehen werden, deren wirkliches Eingreifen schon lange vorher stattgefunden haben kann.

108. In einer wichtigen Classe von Fällen sind die Kräfte Ψ_1 und Ψ_2' harmonisch und haben dieselbe Periode. Wir können dieselben dann durch $A_1 e^{ipt}$, $A_2' e^{ipt}$ darstellen, wo A_1 und A_2' als reell angesehen werden, wenn die Kräfte in den zu vergleichenden Momenten dieselbe Phase haben. Die Resultate lassen sich dann schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \psi_2 &= A_1 \frac{d \log \nabla (ip)}{d e_{12}} e^{ipt} \\ \psi_1' &= A_2' \frac{d \log \nabla (ip)}{d e_{21}} e^{ipt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wo ip für D geschrieben ist. Daher:

$$A_2' \psi_2 = A_1 \psi_1' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Da das Verhältniss $A_1 : A_2'$ nach Annahme reell ist, so muss dasselbe stattfinden für das Verhältniss $\psi_1' : \psi_2$; das zeigt, dass die durch diese Symbole dargestellten Bewegungen dieselbe Phase haben. Gehen wir zu reellen Grössen über, so können wir dieses Theorem folgendermaassen fassen:

Wenn eine Kraft $\Psi_1 = A_1 \cos pt$, welche auf ein System wirkt, eine Bewegung $\psi_2 = \theta A_1 \cos(pt - \varepsilon)$ hervorruft, so bewirkt eine Kraft $\Psi_2' = A_2' \cos pt$ die Bewegung $\psi_1' = \theta A_2' \cos(pt - \varepsilon)$.

Wenn keine Reibung vorhanden ist, so ist ε gleich Null.

Ist $A_1 = A_2'$, so ist $\psi_1' = \psi_2$. Man muss aber daran eingedenk sein, dass die Kräfte Ψ_1 und Ψ_2' nicht nothwendiger Weise vergleichbar sind, eben so wenig wie die Coordinaten der entsprechenden Typen, von denen die eine z. B. eine lineare und die andere eine Winkelverschiebung darstellen kann.

Das reciproke Theorem kann auf verschiedene Weise ausgesprochen werden; bevor wir indessen zu demselben übergehen, wollen wir eine andere Ableitung geben, welche eine Kenntniss der Determinanten nicht erfordert.

Wenn $\Psi_1, \Psi_2, \ldots; \psi_1, \psi_2, \ldots$ und $\Psi_1', \Psi_2', \ldots; \psi_1', \psi_2', \ldots$ zwei Sätze von Kräften und entsprechenden Verschiebungen sind, so geben die Bewegungsgleichungen des §. 103:

$$\Psi_1 \psi_1' + \Psi_2 \psi_2' + \cdots = \psi_1' (e_{11} \psi_1 + e_{12} \psi_2 + e_{13} \psi_3 + \cdots) \\ + \psi_2' (e_{21} \psi_1 + e_{22} \psi_2 + e_{23} \psi_3 + \cdots) + \cdots$$

Wenn nun alle Kräfte wie e^{ipt} variiren, so ist die Wirkung eines symbolischen Factors von der Form e_{rs} auf irgend eine der Grössen ψ nur die, dass diese Grösse mit der Constante multiplicirt wird, welche man findet, wenn man ip für D in e_{rs} einsetzt. Nehmen wir an, dass diese Substitution gemacht ist und achten dann noch auf die Beziehungen $e_{rs} = e_{sr}$; wir können dann schreiben:

$$\Psi_1 \psi_1' + \Psi_2 \psi_2' + \cdots = e_{11} \psi_1 \psi_1' + e_{22} \psi_2 \psi_2' + \cdots \\ + e_{12} (\psi_1' \psi_2 + \psi_2' \psi_1) + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Daher erhalten wir aus Symmetriegründen:

$$\Psi_1\psi_1' + \Psi_2\psi_2' + \cdots = \Psi_1'\psi_1 + \Psi_2'\psi_2 + \,.\,. \quad (4),$$

welches der Ausdruck der reciproken Beziehung ist.

109. In den Anwendungen, zu denen wir bald übergehen wollen, wird durchweg vorausgesetzt, dass die Kräfte aller Typen, mit Ausnahme von zweien (welche wir als die erste und zweite nehmen können), gleich Null sind. Daher haben wir in solchen Fällen:

$$\Psi_1\psi_1' + \Psi_2\psi_2' = \Psi_1'\psi_1 + \Psi_2'\psi_2 \quad .\,.\,.\,. \quad (1).$$

Die sich aus dieser Gleichung ergebenden Folgerungen können auf drei verschiedenen Wegen aufgesucht werden. Zuerst nehmen wir an, dass:

$$\Psi_2 = 0, \; \Psi_1' = 0,$$

das giebt:

$$\psi_2 : \Psi_1 = \psi_1' : \Psi_2' \quad .\,.\,.\,.\,. \quad (2).$$

Hieraus folgt, wie früher, dass die Beziehung zwischen ψ_2 zu Ψ_1 in dem ersten Falle, wo $\Psi_2 = 0$ ist, dieselbe ist wie die Beziehung zwischen ψ_1' zu Ψ_2' in dem zweiten Falle, wenn $\Psi_1' = 0$, wobei sich die Identität dieser Beziehung sowohl auf die Phase wie auf die Amplitude ausdehnt.

Wenige Beispiele mögen das Verständniss eines Gesetzes erleichtern, dessen aussergewöhnliche Allgemeinheit nicht unwahrscheinlich dazu angethan ist, den Eindruck der Unbestimmtheit zu machen.

Sind P und Q zwei Punkte einer horizontalen Stange, die auf irgend eine Weise unterstützt ist (z. B. ein Ende festgeklemmt und das andere frei), so wird eine bestimmte harmonische, transversale Kraft, welche in P angebracht ist, in jedem Moment dieselbe verticale Biegung in Q hervorbringen, welche P erlitten hätte, wenn der Angriffspunkt der Kraft in Q gewesen wäre.

Nehmen wir Winkelverschiebungen an Stelle von linearen Verschiebungen, so ändert sich das Theorem in folgendes: Ein gegebenes harmonisches Kräftepaar in P giebt dieselbe Rotation in Q, welche das in Q angreifende Kräftepaar in P hervorbringen würde.

Wenn eine Verschiebung linear und die andere eine Winkelverschiebung ist, so kann das Resultat folgendermaassen gefasst werden: Nehmen wir für den ersten Fall an, dass in P ein harmonisches Kräftepaar wirkt, und für den zweiten Fall die Wirkung einer verticalen Kraft von derselben Periode und Phase in Q, dann hat die lineare Verschiebung von Q in dem ersten Falle in jedem Momente dieselbe Phase wie die Winkelverschiebung von P in dem zweiten Falle; die Amplituden der Verschiebungen stehen in solcher Beziehung zu einander, dass das Maximum des Kräftepaares in P dieselbe Arbeit thut, wenn sie während der Maximalrotation in P, welche der in Q wirkenden Kraft zu verdanken ist, wirkt, als wie das Maximum der in Q wirkenden Kraft thun würde, wenn dieselbe auch während der dem in P angreifenden Kräftepaar zu verdankenden Maximalverschiebung in Q wirkte. In diesem Falle ist die Fassung complicirter, da die Kräfte, weil sie von verschiedener Art sind, nicht als gleich genommen werden können.

Nehmen wir die Perioden der Kräfte als ausserordentlich gross an, so strebt die jedesmalige Lage des Systems in jedem Momente darnach, mit derjenigen Lage zusammenzufallen, in welcher das System durch die augenblicklich gerade wirkenden Kräfte in Ruhe gehalten würde; es wird dann die Gleichgewichtstheorie anwendbar. Unser Theorem reducirt sich in diesem Falle auf das schon in §. 72 bewiesene statische Problem.

Als zweites Beispiel wollen wir annehmen, dass sich in einem von Luft ausgefüllten Raume, welcher entweder ganz oder theilweise von festen Wänden begrenzt ist, zwei Kugeln A und B befinden, deren Mittelpunkte einen Grad von Freiheit besitzen. Eine in A wirkende periodische Kraft wird dann in B dieselbe Bewegung hervorrufen, welche eintreten würde, wenn die Theile vertauscht wären. Dies findet Statt, was auch für Membranen, Saiten, Stimmgabeln auf Resonanzkästen oder andere Körper, welche in Schwingung versetzt werden können, in der Nachbarschaft der Kugeln sich befinden mögen.

Wenn A und B zwei Punkte eines festen, elastischen Körpers von irgend einer Form bedeuten, so wird weiter nach

demselben Theorem eine in *A* wirkende parallel *OX* Kraft dieselbe Bewegung parallel *OY* in dem Punkte *B* hervorrufen, welche eine gleiche, in *B* parallel *OY* wirkende Kraft in dem Punkte *A* parallel *OX* erzeugen würde.

Oder weiter: *A* und *B* seien zwei Punkte eines von Luft erfüllten Raumes, zwischen welchen Hindernisse irgend welcher Art sich befinden. Dann wird ein in *A* erzeugter Schall in *B* mit derselben Intensität vernommen, mit welcher ein gleich starker in *B* erzeugter Schall in *A* gehört würde [1]). Das Hinderniss kann z. B. bestehen in einer festen Wand, welche von einem oder mehreren Löchern durchbohrt ist. Dieses Beispiel entspricht dem optischen Gesetz, dass, wenn durch irgend eine Combination von reflectirenden oder brechenden Flächen ein Punkt von einem andern aus gesehen werden kann, dass dann der zweite auch von dem ersten gesehen werden muss. In der Akustik treten die Schallschatten gewöhnlich nur theilweise auf in Folge des nicht unbedeutenden Werthes der Wellenlänge in Vergleich mit den Dimensionen der gewöhnlichen Hindernisse: die reciproke Relation hat ein beträchtliches Interesse.

Ein weiteres Beispiel können wir der Electricität entlehnen. Es seien zwei Kreise von isolirtem Draht *A* und *B*, und in der Nachbarschaft derselben irgend welche Combination von Drahtkreisen oder festen, in Verbindung mit Condensatoren stehenden Conductoren. Eine periodische elektromotorische Kraft in dem Kreise *A* wird denselben Strom in *B* erzeugen, welcher in *A* erzeugt würde, wenn die elektromotorische Kraft in *B* wirkte.

Unser letztes Beispiel wollen wir aus der Theorie der Leitung und Strahlung von Wärme nehmen, indem wir uns auf Newton's Gesetz als Basis stützen. Die Temperatur in irgend einem Punkte *A* eines die Wärme leitenden und ausstrahlenden Systems, welche durch eine stetige (oder harmo-

---

[1]) Helmholtz, Crelle, LVII. Die beiden Schalle müssen der Art sein, dass dieselben in der Abwesenheit aller Hindernisse sich selbst in gleicher Weise nach allen Richtungen hin zerstreuen würden.

nische) Wärmequelle in B hervorgebracht wird, ist dieselbe, wie die Temperatur in B, welche einer gleichen in A wirkenden Wärmequelle zu verdanken ist. Noch weiter wird, wenn zu irgend einer Zeit die Quelle in B entfernt wird, der ganze nachfolgende Temperaturverlauf in A derselbe sein, welcher in B stattfinden würde, wenn die Rollen von B und A vertauscht wären.

110. Zu der zweiten Fassung des reciproken Theorems gelangt man, wenn man in (1) des §. 109:

$$\psi_1 = 0, \ \psi_2' = 0$$

setzt, woraus:

$$\Psi_1 \psi_1' = \Psi_2' \psi_2 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

oder:

$$\Psi_1 : \psi_2 = \Psi_2' : \psi_1' \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Beziehung von Ψ_1 zu ψ_2 in dem ersten Falle, worin $\psi_1 = 0$ ist, dieselbe ist, wie die Beziehung von Ψ_2' zu ψ_1' in dem zweiten Falle, wenn $\psi_2' = 0$.

Daher ist in dem frühern Beispiele der Stange, wenn der Punkt P in Ruhe gehalten wird, während dem Punkte Q eine bestimmte Schwingung auferlegt wird (durch eine dort angebrachte Kraft), die Reaction davon in P sowohl in der Amplitude wie Phase dieselbe, wie sie in Q sein würde, wenn dieser Punkt in Ruhe gehalten und die bestimmte Schwingung P auferlegt wäre.

Ebenso ist, wenn A und B zwei electrische Stromkreise in der Nachbarschaft von einer beliebigen Zahl anderer $C, D, \ldots$, entweder geschlossener oder in Condensatoren endend, sind und ein gegebener periodischer Strom in A durch die dazu nöthige elektromotorische Kraft erregt wird, dann ist die in B inducirte elektromotorische Kraft dieselbe, welche sie in A sein würde, wenn die Rollen von A und B vertauscht wären.

Die dritte Fassung der Form des reciproken Theorems wird erhalten, wenn man in (1) des §. 109 setzt:

$$\Psi_1 = 0, \ \psi_2' = 0,$$

woraus:

$$\Psi_1' \psi_1 + \Psi_2' \psi_2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

oder:

$$\psi_1 : \psi_2 = - \Psi_2' : \Psi_1' \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Verhältniss von ψ_1 zu ψ_2 in dem ersten Falle, wenn Ψ_2 allein wirkt, dasselbe ist, wie das negative Verhältniss von Ψ_2 zu Ψ_1' in dem zweiten Falle, wenn die Kräfte sich der Art zu einander verhalten, dass durch sie ψ_2' gleich Null gehalten wird.

Wenn daher der Punkt P des Stabes in Ruhe gehalten wird, während eine periodische Kraft in Q wirkt, so besitzt die Reactionskraft in P dasselbe numerische Verhältniss zu der Kraft in Q, welches die Verschiebung in Q zu der Verschiebung in P haben würde, wenn der Stab durch eine in P angebrachte Kraft zum Schwingen gebracht worden wäre.

111. Die Gültigkeit des reciproken Theorems ist für alle Systeme nachgewiesen, bei welchen die Reibungskräfte durch die Function F dargestellt werden; es ist indessen einer weitern und zwar einer höchst wichtigen Verallgemeinerung fähig. Wir haben in der Wirklichkeit die Existenz der Function F für eine grosse Classe von Fällen nachgewiesen, in welchen der Bewegung Kräfte widerstehen, die proportional der absoluten oder relativen Geschwindigkeit sind; es giebt aber noch andere Quellen der Zerstreuung der Energie, die nicht unter diese Fälle gebracht werden können, deren Wirkungen aber gleichfalls von Wichtigkeit sind, z. B. die Zerstreuung, welche aus der Wärmestrahlung und Wärmeleitung herrührt. Wenn es auch richtig ist, dass in diesen Fällen die Kräfte nicht für alle möglichen Bewegungen in einem constanten Verhältniss zu den Geschwindigkeiten oder Verschiebungen stehen, so sind dieselben doch in jedem wirklichen Falle einer periodischen Bewegung (τ) nothwendiger Weise auch periodisch und lassen sich daher, welches auch ihre Phase ist, stets ausdrücken durch eine Summe von zwei Gliedern, von denen das eine der Verschiebung (absolut oder relativ) und die andere der Geschwindigkeit des betreffenden Theiles des angegriffenen Systems proportional ist. Sind die Coefficienten dieselben, zwar nicht nothwendiger Weise für alle möglichen Bewegungen, aber doch für alle Bewegungen von der Periode (τ), so existirt die Function

in dem einzigen Sinne, wie sie für unsern gegenwärtigen Zweck nothwendig ist. In der That ist es, da das Theorem sich nur auf Bewegungen von der Periode τ beschränkt, vollkommen gleichgültig, ob die Functionen T, F, V von τ abhängen oder nicht. Bei einer solchen Ausdehnung ist das Theorem vielleicht allgemein genug, um über das ganze Feld von dissipativen Kräften ausgedehnt zu werden.

Es ist von Wichtigkeit, sich daran zu erinnern, dass das Princip der Reciprocität auf Systeme begrenzt ist, welche um eine Gleichgewichts-Configuration schwingen und daher nicht ohne eine gewisse Reserve auf solche Probleme, wie das sich in der Fortpflanzung von Schallwellen durch die von Wind bewegte Atmosphäre darbietende, anwendbar ist. Die Schwingungen müssen ferner der Art sein, dass das Quadrat der Bewegung vollkommen vernachlässigt werden kann; andererseits würde unsere Beweisführung nicht Stich halten. Andere offenbare Ausnahmen hängen von einem Missverständniss des Princips selber ab. Man muss ferner darauf achten, das richtige Entsprechen zwischen Kräften und Verschiebungen zu beobachten, wobei die allgemeine Regel die ist, dass die Wirkung einer Kraft während einer Verschiebung als geleistete Arbeit darzustellen ist. Kräftepaare entsprechen daher Rotationen, Drucke entsprechen einem Zuwachs an Volumen u. s. w.

112. In Capitel III betrachteten wir die Schwingung eines Systems mit einem Grad von Freiheit. Der Rest dieses Capitels soll nun einigen Details des Falles, wo die Anzahl der Grade von Freiheit zwei ist, gewidmet sein.

Bezeichnen x und y die beiden Coordinaten, so haben die Ausdrücke für T und V die Form:

$$\left.\begin{aligned} 2\,T &= L\dot{x}^2 + 2\,M\dot{x}\dot{y} + N\dot{y}^2 \\ 2\,V &= Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1);$$

so dass (s. §. 44) die Bewegungsgleichungen, wenn keine Reibung vorhanden ist, folgendermaassen lauten:

$$\left.\begin{array}{l} L\ddot{x} + M\ddot{y} + Ax + By = X \\ M\ddot{x} + N\ddot{y} + Bx + Ay = Y \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, so haben wir für die natürlichen Schwingungen:

$$\left.\begin{array}{l} (LD^2 + A)x + (MD^2 + B)y = 0 \\ (MD^2 + B)x + (ND^2 + C)y = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin D das Symbol für die Differentiation nach der Zeit ist.

Ist eine Lösung von 3): $x = le^{\lambda t}$, $y = me^{\lambda t}$, so ist λ^2 eine der Wurzeln von:

$$(L\lambda^2 + A)(N\lambda^2 + C) - (M\lambda^2 + B)^2 = 0 \;.\,.\; (4),$$

oder:

$$\lambda^4(LN - M^2) + \lambda^2(LC + NA - 2MB) \\ + AC - B^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Constanten L, M, N; A, B, C sind nicht ganz willkürlich. Da T und V nothwendiger Weise positiv sind, so müssen die folgenden Ungleichheiten erfüllt werden:

$$LN > M^2, \; AC > B^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (6).$$

Ueberdies müssen L, N, A, C selbst positiv sein.

Wir wollen jetzt weiter die Wirkung dieser Einschränkungen auf die Wurzeln von (5) untersuchen.

An erster Stelle sind die drei Coefficienten der Gleichung positiv. Für den ersten und dritten liegt dieses wegen (6) auf der Hand. Der Coefficient von λ^2 ist:

$$= (\sqrt{LC} - \sqrt{NA})^2 + 2\sqrt{LNAC} - 2MB;$$

hierin ist, wie sich aus (6) ergibt, $\sqrt{LNAC}$ nothwendiger Weise grösser wie MB. Wir schliessen daraus, dass die Werthe von λ^2, wenn sie reelle Werthe haben, beide negativ sind.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, dass die Wurzeln in der That reell sind. Die hierzu nothwendige Bedingung ist die, dass der folgende Ausdruck nicht negativ ist:

$$(LC + NA - 2MB)^2 - 4(LN - M^2)(AC - B^2).$$

Nach einer leichten Reduction kann dieser in folgende Form gebracht werden:

$$4\,(\sqrt{LN}\,.\,B - \sqrt{AC}\,.\,M)^2$$
$$+ (\sqrt{LC} - \sqrt{NA})^2 \{(\sqrt{LC} - \sqrt{NA})^2 + 4(\sqrt{LNAC} - MB)\}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Bedingung erfüllt ist, da $\sqrt{LNAC} - MB$ positiv ist. Wir haben hier den analytischen Beweis dafür, dass die Werthe von λ^2 beide reell und negativ sind; eine Thatsache, welche wir ohne irgend eine Rechnung aus der physikalischen Constitution des Systems hätten voraussagen können, da die Werthe dazu dienen, die Schwingungen des Systems auszudrücken.

Die zwei Werthe von λ^2 sind verschieden, wenn nicht folgende beide Ausdrücke verschwinden:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{LN}\,.\,B - \sqrt{AC}\,.\,M = 0 \\ \sqrt{LC} - \sqrt{NA} = 0\end{array}\right\};$$

das erfordert, dass:

$$L : M : N = A : B : C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Das gewöhnliche sphärische Pendel ist ein Beispiel dieses Falles.

Mit Hülfe einer zweckmässig gewählten Kraft Y kann man verhindern, dass die Coordinate y sich ändert. Das System verliert dann einen Grad von Freiheit; die Periode, welche dem übrigbleibenden Grad von Freiheit entspricht, ist im Allgemeinen verschieden von jeder der beiden, welche möglich werden vor der Einführung von Y. Nehmen wir an, dass die Bewegungstypen, welche erhalten werden, wenn wir so abwechselnd die Variation von y und x hindern, respective: $e^{\mu_1 t}$, $e^{\mu_2 t}$ sind. Dann werden μ_1^2, μ_2^2 die Wurzeln der Gleichung:

$$(L\lambda^2 + A)\,(N\lambda^2 + C) = 0,$$

welche wir nämlich aus (4) erhalten, wenn man M und B unterdrückt. Daher kann (4) selbst in die Form gebracht werden:

$$LN\,(\lambda^2 - \mu_1^2)\,(\lambda^2 - \mu_2^2) = (M\lambda^2 + B)^2 \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Gleichung zeigt sofort, dass keine der Wurzeln von λ^2 zwischen den Werthen von μ_1^2 und μ_2^2 liegen kann. Eine kleine weitere Untersuchung zeigt, dass eine der Wurzeln

grösser wie die beiden Grössen μ_1^2, μ_2^2 ist und die andere kleiner wie diese beiden. Denn setzen wir:

$$f(\lambda^2) = LN(\lambda^2 - \mu_1^2)(\lambda^2 - \mu_2^2) - (M\lambda^2 + B)^2,$$

so sehen wir, dass wenn λ^2 sehr klein ist, f gleich dem positiven $(AC - B^2)$ ist; wenn λ^2 bis μ_1^2 abnimmt (algebraisch), dann wechselt f sein Zeichen und wird negativ. Zwischen 0 und μ_1^2 muss sich daher eine Wurzel befinden; und ebenso zeigt sich durch ähnliche Schlussfolgerung, dass eine Wurzel zwischen μ_2^2 und $-\infty$ liegt. Wir schliessen daraus, dass die Töne, welche man erhält, wenn man das System den zwei Arten der in Frage stehenden Gebundenheit aussetzt, in Bezug auf ihre Höhe beide zwischen den von den natürlichen Schwingungen des Systems gegebenen Tönen liegen. In besonderen Fällen können μ_1^2 und μ_2^2 einander gleich sein, dann ist:

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{LN}\,\mu^2 \pm B}{\sqrt{LN} \mp M} = \frac{-\sqrt{AC} \pm B}{\sqrt{LN} \mp M} \quad . \; . \quad (9).$$

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern. Jede Art von Gebundenheit, welche das System noch in Besitz von einem Grad von Freiheit lässt, kann man als die Auferlegung einer erzwungenen Beziehung zwischen den Coordinaten ansehen, wie etwa:

$$\alpha x + \beta y = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Wenn jetzt $\alpha x + \beta y$ und irgend eine andere homogene lineare Function von x und y als neue Variable genommen werden, so zeigt dieselbe Beweisführung, dass die einzige Periode, welche dem System nach Einführung der Gebundenheit möglich ist, in Bezug auf ihren Werth zwischen den beiden liegt, welche die natürlichen Schwingungen vorher besassen. Umgekehrt liegen die zwei Perioden, welche möglich sind, wenn eine Gebundenheit aufgehoben wird, zu beiden Seiten der ursprünglichen Periode.

Sind die Werthe von λ^2 einander gleich, was nur geschehen kann, wenn:

$$L : M : N = A : B : C,$$

so hat die Einführung einer Gebundenheit auf die Periode keine Wirkung; z. B. hat die Begrenzung eines sphärischen Pendels auf eine verticale Ebene keine Wirkung.

113. Als ein einfaches Beispiel eines Systems mit zwei Graden von Freiheit können wir eine gespannte Saite von der Länge l nehmen, welche selbst ohne Trägheit ist, aber zwei gleiche Massen m in den Entfernungen a und b von dem einen Ende trägt (Fig. 17). Spannung $= T_1$.

Fig 17.

Bezeichnen x und y die Verschiebungen, dann ist:

$$2\,T = m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$2\,V = T_1 \left\{\frac{x^2}{a} + \frac{(x-y)^2}{b-a} + \frac{y^2}{l-b}\right\}.$$

Da T und V nicht dieselbe Form haben, so folgt, dass die zwei Schwingungsperioden in jedem Falle ungleich sind.

Sind die Gewichte symmetrisch angebracht, so liegt der Charakter der zwei Schwingungscomponenten auf der Hand. Bei der ersten, welche die längere Periode hat, bewegen sich die beiden Gewichte zusammen, so dass x und y die ganze Schwingung hindurch gleich bleiben. Bei der zweiten sind x und y numerisch gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen. Der mittlere Punkt der Saite bleibt dann in Ruhe, die zwei Massen befinden sich immer auf einer durch diesen ruhenden mittlern Punkt hindurchgehenden geraden Linie. In dem ersten Falle ist $x - y = 0$ und in dem zweiten $x + y = 0$, so dass $x - y$ und $x + y$ die neuen Variablen sind, welche genommen werden müssen, um die Functionen T und V gleichzeitig auf Summen von Quadraten zu reduciren.

Sind z. B. die beiden Massen so angehängt, dass dadurch die Saite in drei gleiche Theile getheilt wird, dann ist:

$$\left.\begin{aligned} 2\,T &= \frac{m}{2}\left\{(\dot{x}+\dot{y})^2 + (\dot{x}-\dot{y})^2\right\} \\ 2\,V &= \frac{3\,T_1}{2\,l}\left\{(x+y)^2 + 3\,(x-y)^2\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1),$$

woraus wir als vollständige Lösung erhalten:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= A \cos\left(\sqrt{\frac{3\,T_1}{l.m}}\,.\,t + \alpha\right) \\ x - y &= B \cos\left(\sqrt{\frac{9\,T_1}{l.m}}\,.\,t + \beta\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2),$$

worin, wie gewöhnlich, die Constanten A, α, B, β durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

114. Wenn die beiden natürlichen Perioden eines Systems nahezu einander gleich sind, so tritt die Erscheinung einer intermittirenden Schwingung manchmal in einer sehr merkwürdigen Weise auf. Um dies zu veranschaulichen, können wir auf die Saite zurückgreifen, welche, wie wir jetzt annehmen wollen, belastet ist mit zwei gleichen Massen in Entfernungen von den Enden der Saite, die ein Viertel der ganzen Länge betragen. Wenn der Mittelpunkt der Saite absolut fest wäre, so würden die beiden ähnlichen Systeme auf jeder Saite desselben vollkommen von einander unabhängig sein, oder es würden, wenn das Ganze als ein System betrachtet würde, die zwei Schwingungsperioden einander gleich sein. Wir nehmen nun an, dass der Mittelpunkt, anstatt dass er absolut fest ist, befestigt ist an Federn oder einer andern Vorrichtung, die keine Trägheit hat, so dass der Mittelpunkt ein wenig nachgeben kann. Der in Betreff der Trägheit gemachte Vorbehalt ist geschehen, um die Einführung eines dritten Grades von Freiheit zu vermeiden.

Aus der Symmetrie ist ersichtlich, dass die fundamentalen Schwingungen des Systems die sind, welche durch $x + y$ und $x - y$ dargestellt werden. Ihre Perioden weichen etwas von einander ab, weil wegen des Nachgebens des Mittelpunktes die potentielle Energie einer Verschiebung, wenn x und y gleich sind, geringer ist, als die einer Verschiebung, wenn x und y entgegengesetzte Vorzeichen haben, während die kinetische Energie für die beiden Arten von Schwingungen dieselbe ist. In der Auflösung:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= A \cos (n_1 t + \alpha) \\ x - y &= B \cos (n_2 t + \beta) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

haben wir daher n_1 und n_2 als nahezu, wenn auch nicht ganz gleich anzunehmen. Wir wollen nun annehmen, dass x und $\dot{x}$ im Anfange verschwinden. Die Bedingungen hierfür sind:

$$\left.\begin{array}{r} A\cos\alpha + B\cos\beta = 0 \\ n_1 A\sin\alpha + n_2 B\sin\beta = 0 \end{array}\right\},$$

was annähernd giebt:

$$A + B = 0,\ \alpha = \beta.$$

Daher ist:

$$\left.\begin{array}{l} x = A\sin\frac{n_2 - n_1}{2}t\sin\left(\frac{n_1 + n_2}{2}t + \alpha\right) \\ y = A\cos\frac{n_2 - n_1}{2}t\cos\left(\frac{n_1 + n_2}{2}t + \alpha\right) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (2).$$

Der Werth der Coordinate x ist hier angenähert durch einen harmonischen Ausdruck ausgedrückt, dessen Amplitude, welche proportional $\sin\frac{n_2 - n_1}{2}t$, eine ein wenig variirende harmonische Function der Zeit ist. Die Schwingungen der Coordinaten sind daher intermittirend und so abgeglichen, dass jede der beiden Amplituden verschwindet in dem Momente, wo die andere ihr Maximum hat.

Diese Erscheinung tritt sehr hübsch zu Tage bei einer sehr tiefen Stimmgabel, welche an den Enden schwer belastet ist und sehr fest gehalten wird dadurch, dass man den Stiel in eine massive Unterlage einschraubt. Wenn die Gabel in der gewöhnlichen Weise schwingt, so kommt die Starrheit, oder ein Mangel an Starrheit, des Stieles nicht ins Spiel; wenn indessen die Verschiebungen der zwei Zinken in derselben Richtung geschehen, so hat das geringe Nachgeben des Stieles eine kleine Aenderung der Periode zur Folge. Wenn die Gabel dadurch erregt wird, dass man die eine Zinke anstreicht, so sind die Schwingungen intermittirend und scheinen sich selbst zwischen den Zinken hin und zurück zu übertragen. Wenn indessen die Unterlage nicht sehr fest ist, so ist die aussergewöhnliche Schwingung, welche eine Bewegung des Schwerpunktes in sich schliesst, bald zerstreut; und dann scheint natürlich die Schwingung vollkommen stetig geworden zu sein.

Wird die Gabel nur in der Hand gehalten, so kann die Erscheinung der Intermittenz überhaupt nicht erhalten werden.

115. Die gespannte Saite mit zwei angehängten Massen kann dazu benutzt werden, einige allgemeine Principien zu veranschaulichen. Z. B. liegt die Periode der Schwingung, welche allein als mögliche überbleibt, wenn eine der Massen in Ruhe gehalten wird, zwischen den beiden freien Perioden. Jeder Zuwachs bei einem von den beiden Gewichten erniedrigt die Höhe der beiden natürlichen Schwingungen und umgekehrt. Wenn das neue Gewicht in einem Punkte der Saite angebracht wird, welcher nicht mit den Stellen übereinstimmt, wo die anderen Gewichte angebracht sind, noch mit dem Knotenpunkt einer der beiden vorher möglichen Schwingungen (die andere hat keinen Knotenpunkt), so ist die Wirkung die, dass beide schon vorhandenen Perioden noch verlängert werden. Was die dritte endliche Periode betrifft, welche für die erste Zeit nach der Hinzufügung des neuen Gewichtes möglich wird, so muss dieselbe angesehen werden als abgeleitet von einer unendlich kleinen Grösse, von denen, wie man annehmen kann, eine unendliche Zahl Theil an dem System hat. Es ist lehrreich, die Wirkung der Einführung eines neuen Gewichtes und seiner allmäligen Steigerung von Null bis Unendlich zu verfolgen; zu diesem Zwecke wird es indessen einfacher sein, den Fall zu nehmen, wo nur noch ein anderes Gewicht vorhanden ist. Im Anfange, wenn das hinzukommende Gewicht sehr klein ist, ist eine endliche Periode τ_1 vorhanden und eine andere τ_2 von unendlich kleiner Grösse. Wenn das Gewicht wächst, wird τ_2 endlich und beide τ_1 und τ_2 wachsen continuirlich. Wir wollen uns nun überlegen, was eintritt, wenn das Gewicht sehr gross wird. Eine der Perioden ist nothwendiger Weise gross und fähig, über alle Grenzen zu wachsen. Die andere muss sich einer bestimmten endlichen Grenze nähern. Die erste gehört einer Bewegung an, bei welcher die grössere Masse nahezu so schwingt, als wenn die andere nicht vorhanden wäre; die zweite ist die Periode der Schwingung der kleineren Masse, welche eintritt, wenn die grössere Masse

fest ist. Da nun τ_1 und τ_2 nie einander gleich sein können, so muss τ_1 stets die grössere sein; wir schliessen hieraus, dass es, wenn das Gewicht fortwährend grösser wird, τ_1 ist, welches unendlich wächst, und τ_2, welches sich einer endlichen Grenze nähert.

Wir gehen nun zu der Betrachtung erzwungener Schwingungen über.

116. Die allgemeinen Gleichungen für ein System mit zwei Graden von Freiheit sind mit Einschluss der Reibung:

$$\left.\begin{array}{l}(LD^2+\alpha D+A)x+(MD^2+\beta D+B)y=X\\(MD^2+\beta D+B)x+(ND^2+\gamma D+C)y=Y\end{array}\right\}\quad . \; . \quad (1).$$

In dem Folgenden werden wir voraussetzen, dass $Y=0$ und dass $X=e^{ipt}$. Die Auflösung für y lautet:

$$y=-\frac{(B-p^2M+i\beta p)\,e^{ipt}}{(A-p^2L+i\alpha p)(C-p^2N+i\gamma p)-(B-p^2M+i\beta p)^2}\quad . \; (2).$$

Wenn die Verbindung zwischen x und y lockerer Art ist, so sind die Constanten M, β, B klein, so dass im Allgemeinen das Glied $(B-p^2M+i\beta p)^2$ im Nenner vernachlässigt werden kann. Ist dieses gestattet, so ist die Coordinate y dieselbe, als wenn x an einer Veränderung gehindert würde, und eine Kraft Y eingeführt worden wäre, deren Grösse von N, γ und C unabhängig ist. Wenn dagegen in Folge eines angenäherten Isochronismus zwischen der Kraft und einer der Bewegungen, welche möglich werden, wenn x oder y gezwungen werden, Null zu bleiben, wenn also entweder $A-pL^2+i\alpha p$ oder $C-p^2N+i\gamma p$ klein sind, so muss das Glied des Nenners, welches die Coefficienten des gegenseitigen Einfluss enthält, beibehalten werden, da es nicht länger relativ unwichtig ist; die Lösung hat demgemäss einen complicirteren Charakter.

Symmetriegründe zeigen, dass wir, wenn $X=0$, $Y=e^{ipt}$ angenommen wäre, denselben Werth für x gefunden hätten, den wir nun für y erhalten haben. Dies ist das reciproke Theorem des §. 108 auf ein System angewandt, welches zwei unabhängige Bewegungen ausführen kann. Auf die Saite

mit zwei Gewichten können wir uns auch hier weiter noch als Beispiel beziehen.

117. Soweit für eine auferlegte Kraft. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Bewegung einer Coordinate ($x = e^{ipt}$) vorgeschrieben ist, während $Y = 0$; der grösseren Einfachheit halber wollen wir uns auf den Fall, wo $\beta = 0$, beschränken. Der Werth von y ist:

$$y = -\frac{(B - Mp^2)\, e^{ipt}}{C - Np^2 + i\gamma p} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Wir wollen jetzt die Rückwirkung dieser Bewegung auf x untersuchen. Wir haben:

$$(MD^2 + B)\, y = -\frac{(B - Mp^2)^2\, e^{ipt}}{C - Np^2 + i\gamma p} \quad \ldots \quad (2).$$

Sind der reelle und der imaginäre Theil der Coefficienten von e^{ipt} respective A' und $i\alpha' p$, so können wir setzen:

$$(MD^2 + B)\, y = A' x + \alpha' \dot{x} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

und

$$A' = -\frac{(B - Mp^2)^2\, (C - Np^2)}{(C - Np^2)^2 + \gamma^2 p^2} \quad \ldots \quad (4),$$

$$\alpha' = \frac{(B - Mp^2)^2 \gamma}{(C - Np^2)^2 + \gamma^2 p^2} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die Rückwirkung von y (ober- und unterhalb dessen, was verursacht würde, wenn $y = 0$ gehalten würde) dargestellt wird dadurch, dass man A in $A + A'$ und α in $\alpha + \alpha'$ ändert, wo A' und α' die obigen Werthe besitzen und dass diese Rückwirkung demnach der Wirkung einer Aenderung in den Coefficienten der elastischen Kraft und Reibung äquivalent ist. Diese Aenderungen sind indessen nicht constant, sondern Functionen der Periode der betrachteten Bewegung, deren Charakter wir nun betrachten wollen.

Es sei n der Werth von p, welcher der natürlichen reibungslosen Periode von y entspricht (wenn x auf 0 gehalten wird), so dass $C - n^2 N = 0$. Dann ist:

$$\left.\begin{aligned} A' &= (B - Mp^2)^2 \frac{N(p^2 - n^2)}{N^2(p^2 - n^2)^2 + \gamma^2 p^2} \\ \alpha' &= (B - Mp^2)^2 \frac{\gamma}{N^2(p^2 - n^2)^2 + \gamma^2 p^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (6).$$

In den meisten Fällen, welche wir praktisch zu beachten haben, ist γ klein; es concentrirt sich das Interesse dann hauptsächlich auf Werthe von p, welche nicht viel von n verschieden sind. Wir wollen dementsprechend die Variationen des positiven-Factors $(B - Mp^2)^2$ ausser Rechnung lassen und in dem kleinen Gliede $\gamma^2 p^2$ für p den angenäherten Werth n einsetzen. Wenn p nicht nahezu gleich n ist, dann ist das in Frage stehende Glied von keiner Bedeutung.

Wie wir aus dem allgemeinen Princip der Arbeit voraussagen können, ist α' stets positiv. Sein Maximalwerth wird erreicht, wenn p nahezu $= n$ ist, und ist dann proportional $\frac{1}{\gamma n^2}$, welche Grösse sich umgekehrt wie γ ändert. Dies hätte bei einem oberflächlichen Blick über die vorliegende Frage nicht erwartet werden können; denn es scheint eher paradox zu sein, dass, je grösser die Reibung ist, desto geringer ihr Resultat sein sollte. Man muss sich aber daran erinnern, dass γ nur der Coefficient der Reibung ist und dass, wenn γ klein ist, die Maximalbewegung so gesteigert wird, dass die ganze gegen Reibung geleistete Arbeit grösser ist, als wenn γ beträchtlicher wäre.

Das grösste Interesse verdient aber die Abhängigkeit von A' von p. Ist p kleiner wie n, so ist A' negativ. Wenn p den Werth n passirt, so verschwindet erst A' und wechselt dann das Zeichen. Ist A' negativ, so ist der Reactionseinfluss von y der, als wenn die Kraft, welche die Schwingung aufrecht hält, verringert wird. Wir sehen, dass dieses eintritt, wenn die erzwungene Schwingung langsamer ist wie die, welche y allein natürlich ist. Das Bestreben der Schwingung y ist daher das: die Schwingung x zu verlangsamen, wenn die letztere schon die langsamere ist, dagegen dieselbe zu beschleunigen, wenn sie schon die raschere ist. Nur in dem kritischen Falle

von vollkommenem Isochronismus verschwindet eine derartige Beeinflussung. Der Versuch x in dem durch n bestimmten Verhältniss schwingen zu lassen, zeigt eine eigenthümliche Schwierigkeit, analog derjenigen, welche eintritt bei der Balancirung eines schweren Körpers, dessen Schwerpunkt über der Unterstützung liegt. Nach welcher Seite hin auch eine kleine Abweichung von genauer Adjustirung eintreten mag, die abhängige Schwingung hat stets den Einfluss: den Fehler zu vergrössern. Beispiele von Mangel an Stabilität in der Tonhöhe, welche eine starke Resonanz begleitet, werden uns später begegnen; unzweifelhaft aber findet die interessanteste Anwendung der Resultate dieses Abschnittes statt bei der Erklärung der anomalen Dispersion durch Substanzen, welche eine sehr ausgesprochene Absorption eines Spectrumtheiles zeigen; diese anormale Dispersion erstreckt sich bekanntlich auf die beiden Lichtarten, welche bei dem normalen Spectrum unmittelbar auf jeder Seite der Absorptionsbande liegt[1]). Es wurde von Christiansen und Kundt, den Entdeckern dieser bemerkenswerthen Erscheinung, beobachtet, dass Medien von der in Frage stehenden Art (z. B. Fuchsin in einer Alkohollösung) den Strahl unmittelbar unter der Absorptionsbande anormal zuviel brechen und den über der Absorptionsbande ebenso zu wenig. Nehmen wir an, was aus anderen Gründen natürlich ist, dass die intensive Absorption das Resultat einer Uebereinstimmung zwischen den Schwingungen der absorbirten Lichtart und einigen den Molecülen der absorbirenden Substanz eigenen Schwingungen ist, so wird unsere Theorie angeben, dass für Licht von etwas grösserer Periode die Wirkung dieselbe sein muss, wie eine Verringerung der natürlichen Elasticität des Aethers, und eine solche Verringerung offenbart sich in einer langsameren Fortpflanzung und vergrösserter Brechung. Auf der andern Seite der Absorptionsbande muss ihr Einfluss in der entgegengesetzten Richtung auftreten.

Um das Gesetz des Zusammenhanges zwischen A'

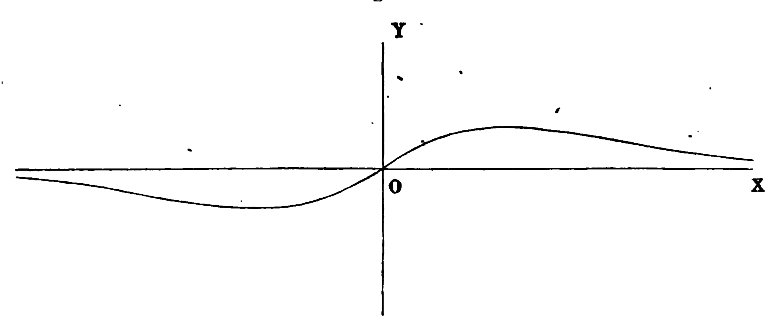
[1]) Phil. Mag. May 1872. Ebenso Sellmeier, Pogg. Ann. Bd. 143, p. 272.

und p aufzustellen, nehmen wir der Kürze halber $\gamma n = a$, $N(p^2 - n^2) = x$, so dass:

$$A' \propto \frac{x}{x^2 + a^2}.$$

Wird das Zeichen von x geändert, so kehrt sich A' mit x um, aber behält seinen numerischen Werth. Wenn $x = 0$ oder $\pm \infty$, so verschwindet A'.

Fig. 18.



Daher liegt der Anfangspunkt auf der Curve für A' (Fig. 18), die x-Axe ist eine Asymptote. Die Maximal- und Minimalwerthe von A' treten auf, wenn x respective gleich $+a$ oder $-a$ ist; dann ist:

$$\frac{x}{x^2 + a^2} = \pm \frac{1}{2a}.$$

Die entsprechenden Werthe von p werden gegeben durch:

$$p^2 = n^2 \pm \frac{\gamma n}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Je kleiner also der Werth von a oder γ, desto grösser ist die Maximaländerung von A, der entsprechende Werth von p nähert sich dann ebenso mehr und mehr n. Es ist wohl zweckmässig zu wiederholen, dass bei der Anwendung in der Optik eine Verminderung von γ begleitet ist von einem Zuwachs in dem Absorptionsmaximum. Wenn der Periodenausgleich der Art ist, dass daraus zu Gunsten von A' das Grösstmöglichste sich ergiebt, so ist der entsprechende Werth von α' die Hälfte des Maximums für α.

Sechstes Capitel.

Transversale Schwingungen von Saiten.

118. Unter den schwingenden Körpern nehmen keine eine hervorragendere Stellung ein, wie die gespannten Saiten. Seit den ältesten Zeiten sind dieselben zu musikalischen Zwecken benutzt worden; gegenwärtig bilden sie noch die wesentlichsten Theile solcher wichtigen Instrumente, wie das Clavier und die Violine. Von besonderem Interesse müssen dieselben auch dem Mathematiker sein, weil sie das Schlachtfeld sind, auf welchem die Controversen von D'Alembert, Euler, Bernoulli und Lagrange über die Natur der Lösungen partieller Differentialgleichungen ausgefochten wurden. Für denjenigen, welcher sich mit Akustik beschäftigt, sind die gespannten Saiten doppelt wichtig. In Folge der vergleichsweisen Einfachheit ihrer Theorie sind sie der Boden, auf welchem schwierige oder zweifelhafte Fragen, wie die, welche sich auf die Natur der einfachen Töne beziehen, am Vortheilhaftesten entschieden werden können; während dieselben in der Gestalt des Monochords oder des Sonometers die allgemein nützlichsten Mittel zur Vergleichung der Tonhöhe darbieten.

Die Saite der Akustik ist eine vollkommen gleichförmige und biegsame Faser von fester Materie, welche zwischen zwei festen Punkten ausgespannt ist — in Wirklichkeit ein idealer

Körper, der in der Praxis niemals verwirklicht wird, wenn auch die meisten in der Musik gebrauchten Saiten ihm sehr nahe kommen. Wir werden später sehen, wie man jeder kleinen Abweichung von der vollkommenen Biegsamkeit und Gleichförmigkeit Rechnung trägt.

Die Schwingungen einer Saite können in zwei scharf geschiedene Classen eingetheilt werden, welche in der Praxis von einander unabhängig sind, wenn die Amplituden gewisse Grenzen nicht überschreiten. Bei der ersten Classe sind die Verschiebungen und Bewegungen der Theile longitudinal, so dass die Saite stets gerade bleibt. Die potentielle Energie einer Verschiebung hängt nicht von der ganzen Spannung, sondern von den Aenderungen der Spannung ab, welche in den verschiedenen Theilen der Saite auftreten und von der vergrösserten oder verringerten Ausdehnung abhängen. Um dieselbe zu berechnen, müssen wir die Beziehung zwischen der Ausdehnung einer Saite und der spannenden Kraft kennen. Das angenäherte Gesetz (welches von Hooke stammt) kann so ausgedrückt werden, dass man sagt: die Ausdehnung ändert sich wie die Spannung, so dass wir, wenn l und l' die natürlichen und die gespannten Längen der einen Saite bedeuten und T die Spannung, haben:

$$\frac{l'-l}{l} = \frac{T}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wo E eine Constante ist, welche von dem Material und dem Querschnitt abhängt. Dieselbe kann als die Spannung definirt werden, welche nothwendig ist, um die Saite auf ihre doppelte natürliche Länge zu bringen, wenn das Gesetz auf so grosse Länge ausgedehnt wird, was im Allgemeinen mit der Wirklichkeit bei Weitem nicht übereinstimmt.

119. Die Schwingungen der zweiten Art sind transversal; d. h. die Theilchen der Saite bewegen sich merklich nur in Ebenen, welche senkrecht zu der durch die Saite gebildeten Linie sind. In diesem Falle hängt die potentielle Energie einer Verschiebung von der ganzen, allgemeinen Spannung ab; die

kleinen Spannungsänderungen, welche den Zuwachs an Spannung, der von den Verschiebungen herrührt, begleiten, können ausser Rechnung gelassen werden. Es ist hierbei angenommen, dass die Streckung, welche von der Bewegung herrührt, vernachlässigt werden kann im Vergleich mit der Streckung, welcher die Saite schon in ihrer Gleichgewichtslage unterworfen ist. Ueber die Erfüllung dieser Bedingung einmal sicher, brauchen wir bei der Untersuchung der transversalen Schwingungen nichts weiter von dem Gesetz der Ausdehnung zu kennen.

Die allgemeinste Schwingung von transversaler oder seitlicher Art kann, wie wir gleich beweisen werden, in zwei Sätze von normalen Schwingungscomponenten aufgelöst werden, die in senkrecht zu einander stehenden Ebenen vor sich gehen. Da allein in den Anfangsbedingungen ein zur Frage gehöriger Unterschied zwischen der einen und der andern Ebene begründet sein kann, so genügt es für die meisten Zwecke, die Bewegung als begrenzt anzunehmen auf eine einzelne Ebene, welche durch die Linie der Saite hindurchgeht.

Bei der Behandlung der Theorie der Saiten ist es gebräuchlich, mit zwei particulären Lösungen der partiellen Differentialgleichung zu beginnen, welche die Fortpflanzung der Wellen in der positiven und der negativen Richtung darstellen und diese der Art zu combiniren, dass sie mit dem Falle einer endlichen Saite, deren Enden in Ruhe gehalten werden, übereinstimmen; keine von diesen Lösungen kann, für sich allein genommen, bestehen bei der Existenz von Knotenpunkten, oder Stellen von vollkommener Ruhe. Diese Betrachtungsweise der Frage ist sehr wichtig; wir werden sie auch vollständig durchnehmen; indessen erscheint es kaum wünschenswerth, die Lösung zu allererst schon auf Grund einer Eigenschaft zu finden, die nur einer gleichförmigen Saite in solchem Grade zukommt, wie es bei der ungestörten Fortpflanzung der Wellen doch der Fall ist. Wir wollen nach der allgemeineren Methode vorgehen, indem wir annehmen (gemäss dem, was in dem letzten Capitel bewiesen wurde), dass die Bewegung in Normalcomponenten von harmonischem Typus aufgelöst werden

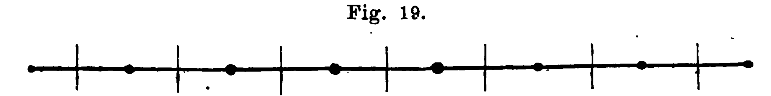
kann, und indem wir dann die Perioden und den Charakter der letzteren durch die speciellen Bedingungen des Systems bestimmen.

Um diesen Plan auszuführen, muss der erste Schritt natürlich die Untersuchung der partiellen Differentialgleichung sein, welcher die Bewegung einer continuirlichen Saite unterliegt. Um aber einen Punkt klarzustellen, dessen vollkommenes Verständniss sehr wichtig ist — das ist nämlich der Zusammenhang zwischen endlicher und unendlicher Freiheit und dem diesem entsprechenden Uebergang zwischen willkürlichen Constanten und willkürlichen Functionen —, wollen wir auf einem etwas andern Wege vorgehen.

120. In Capitel III ergab es sich, dass die fundamentale Schwingung einer Saite in ihrem Charakter nicht ganz geändert wird, wenn man die Masse im Mittelpunkt concentrirt. Indem wir diese Idee verfolgen, sehen wir, dass wir, wenn die ganze Saite in eine Anzahl von kleinen Theilen getheilt und die Masse eines jeden Theils in dessen Mittelpunkt concentrirt wird, durch Wahl einer hinreichend grossen Anzahl dieser Theile zu einem System kommen, welches noch von endlicher Freiheit ist, aber auch fähig ist, mit jeder nur gewünschten Annäherung die continuirliche Saite darzustellen, wenigstens so weit, wie es die unteren Schwingungscomponenten betrifft. Kann die analytische Lösung für irgend eine Anzahl von solchen Eintheilungen erhalten werden, so wird die Grenze dieser Lösung das einer gleichförmigen Saite entsprechende Resultat geben. Dies ist die von **Lagrange** befolgte Methode.

Es sei l die Länge, ϱl die ganze Masse der Saite, so dass also ϱ die Masse in der Längeneinheit bedeutet; T_1 sei die Spannung.

Fig. 19.



Die Länge der Saite wird in $m + 1$ gleiche Theile (a) getheilt, so dass:

$$(m+1)\,a = l \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1).$$

In den m Theilungspunkten denken wir uns gleiche Massen μ concentrirt, welche die Masse derjenigen einzelnen Stücke (a) der Saite darstellen, die von diesen Punkten gerade halbirt werden. Die Masse eines jeden der beiden Endstücke von der Länge $\frac{1}{2}a$ denken wir uns in den Endpunkten concentrirt. Unter diesen Annahmen ist:

$$(m+1)\mu = \varrho l \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2).$$

Wir gehen nun zu der Schwingung einer Saite über, welche selbst keine Trägheit besitzt, aber in einem jeden der m Punkte (a), die von einander und von den Enden gleich weit abstehen, mit einer Masse μ belastet ist.

Bezeichnen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{m+2}$ die seitlichen Verschiebungen der belasteten Punkte mit Einschluss des Anfangs- und des Endpunktes, so haben wir für T und V folgende Ausdrücke:

$$T = \frac{1}{2}\mu\left\{\dot\psi_1^2 + \dot\psi_2^2 + \cdots + \dot\psi^2_{m+1} + \dot\psi^2_{m+2}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad (3),$$

$$V = \frac{T_1}{2a}\left\{(\psi_2-\psi_1)^2 + (\psi_3-\psi_2)^2 + \cdots + (\psi_{m+2}-\psi_{m+1})^2\right\} \;.\;. \quad (4),$$

mit den Bedingungen, dass ψ_1 und ψ_{m+2} verschwinden. Dies giebt nach Lagrange's Methode folgende m Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} B\psi_1 + A\psi_2 + B\psi_3 = 0 \\ B\psi_2 + A\psi_3 + B\psi_4 = 0 \\ B\psi_3 + A\psi_4 + B\psi_5 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B\psi_m + A\psi_{m+1} + B\psi_{m+2} = 0 \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad (5),$$

worin

$$A = \mu D^2 + \frac{2T_1}{a}, \quad B = -\frac{T_1}{a} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (6).$$

Unter der Voraussetzung, dass die betrachtete Schwingung eine von normalem Typus ist, nehmen wir nun an, dass ψ_1, ψ_2 etc. alle proportional $\cos(nt-\varepsilon)$ sind, worin n zu bestimmen bleibt. A und B können dann als Constante angesehen werden, mit der Ersetzung von $-n^2$ für D^2.

Setzen wir der Kürze halber:

$$C = A : B = -2 + \frac{\mu a n^2}{T_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

so nimmt die Determinantengleichung, welche die Werthe von n^2 angiebt, folgende Form an:

$$\begin{vmatrix} C, & 1, & 0, & 0, & 0 & \cdots \\ 1, & C, & 1, & 0, & 0 & \cdots \\ 0, & 1, & C, & 1, & 0 & \cdots \\ 0, & 0, & 1, & C, & 1 & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 1, & C & \cdots \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \end{vmatrix} \begin{matrix} m \text{ Reihen} \\ \\ \\ = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8). \end{matrix}$$

Aus dieser Gleichung können die Wurzelwerthe gefunden werden. Man kann beweisen, dass, wenn $C = 2 \cos \theta$, die Determinante äquivalent ist $\sin (m + 1) \theta : \sin \theta$; wir werden indess unser Ziel mit grösserer Leichtigkeit direct aus (5) erreichen, wenn wir einem Fingerzeig folgen, der sich aus den bekannten Resultaten über eine continuirliche Saite ergiebt, und indem wir zur Probe einen particulären Schwingungstypus annehmen. Es sei also eine Lösung:

$$\psi_r = P \sin (r - 1) \beta \cos (nt - \varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

eine Form, welche die Bedingung erfüllt, dass $\psi_1 = 0$. Damit ψ_{m+2} verschwindet, muss:

$$(m + 1) \beta = s\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

sein, wo s eine ganze Zahl ist. Setzen wir die für ψ angenommenen Werthe ein in die Gleichungen (5), so finden wir, dass dieselben erfüllt sind, vorausgesetzt, dass:

$$2 B \cos \beta + A = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11);$$

so dass der Werth von n, in β ausgedrückt, ist:

$$n = 2 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{T_1}{\mu a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Eine normale Schwingung wird daher dargestellt durch

$$\psi_r = P_s \sin \frac{(r - 1) s\pi}{m + 1} \cos (n_s t - \varepsilon_s) \quad . \quad . \quad (13),$$

worin:

$$n_s = 2\sqrt{\frac{T_1}{\mu a}} \sin \frac{s\pi}{2(m+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

und P_s, ε_s willkürliche Constanten bezeichnen, welche unabhängig sind von der allgemeinen Constitution des Systems. Die m zulässigen Werthe von n werden aus (14) gefunden, indem man s der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3 . . . . m ertheilt; sie sind sämmtlich verschieden. Setzen wir $s = m + 1$, so verschwindet ψ_r, so dass dieser Werth keine der möglichen Schwingungen giebt. Grössere Werthe von s geben nur wieder dieselben Perioden. Ist $m + 1$ gerade, so ist einer der Werthe von n — der nämlich, welcher $s = \frac{1}{2}(m + 1)$ entspricht — derselbe, welcher in dem Falle von nur einem einzigen Gewicht ($m = 1$) gefunden wird. Die Bedeutung hiervon liegt auf der Hand. Bei der betrachteten Schwingungsart bleibt ein um das andere Theilchen in Ruhe, so dass die dazwischen liegenden sich thatsächlich so bewegen, als ob dieselben in den Centren von Saiten von der Länge $2a$, die an den Enden befestigt sind, angebracht wären.

Die allgemeinste Lösung findet man, wenn man alle möglichen particulären Lösungen vom Normaltypus zusammenaddirt, als:

$$\psi_r = \sum_{s=1}^{s=m} P_s \sin \frac{(r-1)s\pi}{m+1} (\cos n_s t - \varepsilon_s) \, . \, . \, (15).$$

Dieselbe kann dadurch, dass man den willkürlichen Constanten zweckmässige Werthe beilegt, mit der Schwingung identificirt werden, welche sich aus willkürlichen Anfangsbedingungen ergiebt.

Es bezeichne x den Abstand des Theilchens r vom Ende der Saite, so dass $(r-1)a = x$; indem wir dann für μ und a die Werthe aus (1) und (2) einsetzen, kann unsere Lösung geschrieben werden:

$$\psi(x) = P_s \sin s \frac{\pi x}{l} \cos(n_s t - \varepsilon_s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

$$n_s = \frac{2(m+1)}{l}\sqrt{\frac{T_1}{\varrho}} \sin \frac{s\pi}{2(m+1)} \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Um auf den Fall einer continuirlichen Saite überzugehen, haben wir nur m gleich unendlich zu setzen. Die erste Gleichung behält ihre Form, und giebt die Verschiebung irgend eines Punktes x an. Die Grenzform der zweiten ist einfach:

$$n = \frac{s\pi}{l}\sqrt{\frac{T_1}{\varrho}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

woraus man für die Dauer der Periode erhält:

$$\tau = \frac{2\pi}{n} = \frac{2l}{s}\sqrt{\frac{\varrho}{T_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Die Perioden der einzelnen Partialtöne sind daher aliquote Theile von der des tiefsten der Reihe, der erhalten wird, wenn man $s = 1$ setzt. Die ganze Bewegung ist in allen Fällen periodisch; und die Periode ist $2l\sqrt{\frac{\varrho}{T_1}}$. Dieser Satz muss aber nicht so verstanden werden, als ob eine kürzere Periode ausgeschlossen wäre; denn in einzelnen Fällen kann irgend eine Anzahl der tieferen Partialtöne ausfallen. Alles, was behauptet werden soll, ist das, dass das oben erwähnte Zeitintervall hinreichend ist, eine vollständige Wiederkehr alles Voraufgegangenen zu bringen. Wir verschieben für den Augenblick jede weitere Besprechung der wichtigen Formel (19); es ist aber interessant, ins Auge zu fassen, in welcher Weise sich Gleichung (17) der Grenze nähert, wenn m nach und nach grösser und grösser gemacht wird. Zu diesem Zwecke wird es genügen, den tiefsten Ton zu nehmen, für welchen $s = 1$ ist, und demgemäss die Aenderung von

$$\frac{2(m+1)}{\pi} \sin \frac{\pi}{2(m+1)}$$

zu verfolgen.

In der folgenden Tabelle stehen eine Reihe von zusammengehörenden Werthen der Function und der Variabeln:

m	1	2	3	4	9	19	39
$\frac{2(m+1)}{\pi} \sin \frac{\pi}{2(m+1)}$	0,9003	0,9549	0,9745	0,9836	0,9959	0,9990	0,9997

Man sieht, dass für sehr mässige Werthe von m die Grenze beinahe erreicht ist. Da m die Anzahl der (beweglichen) Gewichte ist, so entspricht der Fall $m = 1$ dem in Capitel III untersuchten Problem; bei der Vergleichung müssen wir aber daran eingedenk bleiben, dass wir dort voraussetzten: es sei die ganze Masse der Saite im Mittelpunkt concentrirt. In dem vorliegenden Fall ist das Gewicht im Centrum nur halb so gross; das Uebrigbleibende wird in den Enden concentrirt gedacht, wo es ohne Einfluss ist.

Aus der Thatsache, dass unsere Lösung allgemein ist, fogt, dass jede Anfangsform der Saite dargestellt werden kann durch:

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} (P \cos \varepsilon)_s \sin s \frac{\pi x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Da weiter jede mögliche Form der Saite überhaupt als Anfangsform betrachtet werden kann, schliessen wir, dass jede endliche einwerthige Function von x, welche bei $x = 0$ und $x = l$ verschwindet, innerhalb dieser Grenzen in eine Reihe von Sinussen von $\frac{\pi x}{l}$ und den Vielfachen hiervon entwickelt werden kann; — das ist aber ein Fall von Fourier's Satz. Wir werden gleich zeigen, wie man die allgemeinere Form abzuleiten vermag.

121. Wir können jetzt durch Integration wie in §. 93 die Constanten für eine continuirliche Saite bestimmen; indessen ist es lehrreich, das Problem erst in dem allgemeinen Fall (m endlich) aufzulösen, und später zur Grenze überzugehen. Die Anfangsbedingungen sind:

$$\psi(a) = A_1 \sin \frac{\pi a}{l} + A_2 \sin 2 \frac{\pi a}{l} + \cdots + A_m \sin m \frac{\pi a}{l}$$

$$\psi(2a) = A_1 \sin 2 \frac{\pi a}{l} + A_2 \sin 4 \frac{\pi a}{l} + \cdots + A_m \sin 2m \frac{\pi a}{l},$$

. . . .

$$\psi(ma) = A_1 \sin m \frac{\pi a}{l} + A_2 \sin 2m \frac{\pi a}{l} + \cdots + A_m \sin mm \frac{\pi a}{l};$$

worin der Kürze halber $A_s = P_s \cos \varepsilon_s$ gesetzt ist und $\psi(a)$, $\psi(2a)$, $\cdots$ $\psi(ma)$ die Anfangsverschiebungen der m Theilchen sind.

Um irgend eine der Constanten, etwa A_s, zu bestimmen multipliciren wir die erste Gleichung mit $\sin s \frac{\pi a}{l}$, die zweite mit $\sin 2s \frac{\pi a}{l}$ etc. und addiren die Resultate. Dann verschwinden nach den Lehren der Trigonometrie die Coefficienten aller Constanten mit Ausnahme von A_s, während der von A_s $= \frac{1}{2}(m+1)$[1]) ist. Daher ist:

$$A_s = \frac{2}{m+1} \sum_{r=1}^{r=m} \psi(ra) \sin rs \frac{\pi a}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wir brauchen uns hier nicht länger mit dem Hinschreiben der Werthe von B_s (die gleich $P_s \sin \varepsilon_s$ sind) in ihrer Abhängigkeit von den Anfangsgeschwindigkeiten aufzuhalten. Wenn a unendlich klein wird, dann ändert sich ra unter dem Summationszeichen in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis l. Zu gleicher Zeit ist $\frac{1}{m+1} = \frac{a}{l}$, so dass wir, indem wir $ra = x$ und $a = dx$ setzen, schliesslich haben:

$$A_s = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{s\pi x}{l}\right) dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

welcher Ausdruck A_s in Werthen der Anfangsverschiebungen giebt.

---

[1]) Todhunter, Int. Calc. p. 267.

122. Wir wollen nun unabhängig von dem Vorigen die partielle Differentialgleichung untersuchen, welche die transversale Bewegung einer vollkommen biegsamen Saite regelt, unter den Voraussetzungen, dass 1) die Grösse der Spannung als constant angesehen werden darf, und dass 2) das Quadrat der Neigung eines jeden Theils der Saite zu ihrer ursprünglichen Richtung vernachlässigt werden kann. Wie früher stellt ϱ die lineare Dichtigkeit jedes Punktes dar, T_1 ist die constante Spannung. Wir nehmen rechtwinklige Coordinaten parallel und senkrecht zur Saite, so dass x allein die Gleichgewichtslage und x, y, z die verschobene Lage jedes Theilchens zur Zeit t angiebt. Die auf das Element dx wirkenden Kräfte sind die Spannungen an seinen beiden Enden und jede von aussen wirkende Kraft $Y\varrho\, dx$, $Z\varrho\, dx$. Nach dem D'Alembert'schen Princip bilden diese Kräfte mit den gegen die Beschleunigung wirkenden Reactionen $-\varrho\,\frac{d^2 y}{dt^2}$, $-\varrho\,\frac{d^2 z}{dt^2}$ ein Gleichgewichtssystem. In dem Punkte x sind die Spannungscomponenten:

$$T_1\,\frac{dy}{dx},\quad T_1\,\frac{dz}{dx},$$

wenn die Quadrate von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ vernachlässigt werden, so dass die aus den Spannungen herrührenden, auf das Element dx wirkenden Kräfte sind:

$$T_1\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx,\quad T_1\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)dx.$$

Daher haben wir für die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{T_1}{\varrho}\,\frac{d^2 y}{dx^2} + Y\\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{T_1}{\varrho}\,\frac{d^2 z}{dx^2} + Z\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

aus denen ersichtlich ist, dass die abhängigen Variablen y und z unter sich von einander ganz unabhängig sind.

Der Leser möge diese Gleichungen mit den entsprechen-

den Gleichungen in §. 120 mit endlichen Differenzen vergleichen. Die letzteren können geschrieben werden:

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \psi(x) = \frac{T_1}{a} \left\{ \psi(x-a) + \psi(x+a) - 2\psi(x) \right\}.$$

An der Grenze, wenn a unendlich klein ist, wird:

$$\psi(x-a) + \psi(x+a) - 2\psi(x) = \psi''(x)\, a^2,$$

da $\mu = \varrho a$; die Gleichung nimmt dann schliesslich die Form an:

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi(x) = \frac{T_1}{\varrho} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x),$$

die mit (1) übereinstimmt.

In gleicher Weise werden die Grenzformen von (3) und (4) des §. 120:

$$T = \frac{1}{2} \int \varrho \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

$$V = \frac{1}{2} T_1 \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Es hätte dies auch direct bewiesen werden können.

Die erste ergiebt sich direct aus der Definition von T. Um die zweite zu beweisen, braucht man sich nur daran zu erinnern, dass die potentielle Energie bei jeder Configuration die Arbeit ist, welche dazu erfordert wird, die nöthige Streckung gegen die Spannung T_1 auszuführen. Rechnen wir von der Gleichgewichtslage, so haben wir:

$$V = T_1 \int \left(\frac{ds}{dx} - 1\right) dx;$$

entwickeln wir bis zur dritten Potenz, so ist:

$$\frac{ds}{dx} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

123. Bei den meisten Anwendungen, welche wir zu machen haben, ist die Dichtigkeit ϱ constant; weiter sind keine von aussen wirkenden Kräfte vorhanden und schliesslich kann man annehmen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt. Wir schreiben dann zweckmässig:

$$\frac{T_1}{\varrho} = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

und die Differentialgleichung erhält folgende Form:

$$\frac{d^2y}{d(at)^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Nehmen wir nun an, dass y sich wie $\cos mat$ ändert, so wird unsere Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

deren allgemeinste Lösung ist:

$$y = (A \sin mx + C \cos mx) \cos mat \quad \ldots \quad (4).$$

Dies ist indessen nicht die allgemeinste harmonische Bewegung mit der in Frage stehenden Periode. Um die letztere zu erhalten, müssen wir annehmen:

$$y = y_1 \cos mat + y_2 \sin mat \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

wo y_1 und y_2 Functionen von x sind, und zwar nicht nothwendiger Weise dieselben. Durch Substitution in (2) ergiebt sich, dass y_1 und y_2 Gleichungen von der Form (3) unterworfen sind, so dass schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} y = (A \sin mx + C \cos mx) \cos mat \\ + (B \sin mx + D \cos mx) \sin mat \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6),$$

ein Ausdruck, welcher vier willkürliche Constanten enthält. Für jede continuirliche Saitenlänge, welche ohne Unterbrechung die Differentialgleichung erfüllt, ist dieses die allgemeinste mögliche Lösung, unter der Bedingung, dass die Bewegung in jedem Punkte einfach harmonisch ist. Wir wissen nun aber aus früheren Capiteln, dass, wo nur immer die Saite einen Theil eines frei und ohne Zerstreuung (Dissipation) schwingenden Systems bildet, alle Theile gleichzeitig sich in derselben Phase befinden; das erfordert, dass:

$$A : B = C : D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7);$$

dann ist also die allgemeinste Schwingung von einfachem harmonischen Typus:

$$y = \{\alpha \sin mx + \beta \cos mx\} \cos(mat - \varepsilon) \quad \ldots \quad (8).$$

124. **Das einfachste sowohl wie das wichtigste Problem, welches mit dem uns augenblicklich beschäftigenden Gegenstand zusammenhängt, ist die Untersuchung der freien Schwingungen einer endlichen Saite von der Länge l, welche an beiden Enden festgehalten wird.** Nehmen wir den Anfangspunkt von x in dem einen Ende, so sind die Endbedingungen die, dass, wenn $x = 0$ und wenn $x = l$ ist, y für alle Werthe von t verschwindet. Die erste Bedingung erfordert, dass in (6) des §. 123:

$$C = 0, \quad D = 0 \quad \dots \dots \dots \dots (1);$$

und die zweite, dass:

$$\sin ml = 0 \quad \dots \dots \dots \dots (2),$$

oder dass $ml = s\pi$, worin s eine ganze Zahl ist. Wir sehen hieraus, dass die einzig mögliche harmonische Schwingung der Art ist, dass:

$$m = \frac{s\pi}{l} \quad \dots \dots \dots \dots (3),$$

und daher:

$$y = \sin \frac{s\pi x}{l}\left(A \cos \frac{s\pi a t}{l} + B \sin \frac{s\pi a t}{l}\right) \quad \dots (4).$$

Nun wissen wir a priori, dass, wie auch die Bewegung sein mag, dieselbe stets als eine Summe von einfachen harmonischen Schwingungen dargestellt werden kann, und wir schliessen daraus: dass die allgemeinste Lösung für eine in 0 und l befestigte Saite ist:

$$y = \sum_{s=1}^{s=\infty} \sin \frac{s\pi x}{l}\left(A_s \cos \frac{s\pi a t}{l} + B_s \sin \frac{s\pi a t}{l}\right) \dots (5)$$

Die tiefste Schwingung ist die, welche $s = 1$ entspricht. Ihre Periode wird gegeben durch:

$$\tau_1 = \frac{2l}{a} = 2l\sqrt{\frac{\varrho}{T_1}} \quad \dots \dots \dots \dots (6).$$

Die anderen Componenten haben Perioden, welche aliquote Theile von τ_1 sind:

$$\tau_s = \tau_1 : s \quad \dots \dots \dots \dots (7);$$

so dass die ganze Bewegung unter allen Umständen in der Zeit τ_1 periodisch ist, wie wir ja auch schon gesehen haben. Der ausgeschickte Schall bildet im Allgemeinen einen musikalischen Klang, gemäss unserer Definition von diesem Ausdruck, dessen Höhe durch τ_1 bestimmt wird, der Periode der tiefsten Componente. Es kann indessen in speciellen Fällen auch eintreten, dass die tiefste Schwingung nicht vorhanden ist, und dass die ganze Periode auch in keiner kürzeren Zeit periodisch ist. Damit dieses nicht eintritt, müssen die äusseren Bedingungen der Art sein, dass $A_1^2 + B_1^2$ verschwindet, während zum Beispiel $A_2^2 + B_2^2$ und $A_3^2 + B_3^2$ endlich sind. In solchen Fällen kann der Schall kaum ein Klang genannt werden; gewöhnlich tritt es in der Praxis aber ein, dass, wenn der tiefste Ton abwesend ist, irgend ein anderer an seine Stelle mit dem Charakter des Fundamentaltones eintritt und dass dann der Schall noch einen Klang im gewöhnlichen Sinne bildet, wenn auch natürlich von grösserer Höhe. Ein einfacher Fall der Art ist der, wo alle ungeraden Componenten von der ersten an verloren gegangen sind. Die ganze Bewegung ist dann in der Zeit $\frac{1}{2}\tau_1$ periodisch; wenn die zweite Componente vorhanden ist, bietet der Schall nichts Ungewöhnliches dar.

Die Höhe eines von einer Saite gegebenen Klanges (6), und der Charakter der Fundamentalschwingung wurde zuerst auf Grund von mechanischen Principien von Brook Taylor im Jahre 1715 untersucht; wir verdanken aber Daniel Bernoulli (1755) die in (5) enthaltene allgemeine Lösung. Er erhielt dieselbe, wie wir es gethan haben, durch die Synthese particulärer Lösungen, eine Synthese, die zulässig war in Uebereinstimmung mit seinem Princip der Coexistenz von kleinen Bewegungen. Zu seiner Zeit war die Allgemeinheit des so erhaltenen Resultates eine offene Frage; in der That war es die Ansicht von Euler, und ebenso, sehr befremdlicher Weise, die von Lagrange[1]), dass die in (5) gegebene Sinusreihe eine willkür-

[1]) S. Riemann's Partielle Differentialgleichungen §. 78.

liche Function nicht darzustellen im Stande sei. Auf der anderen Seite war Bernoulli's Argument, welches sich auf die unendliche Anzahl der disponiblen Constanten stützte, sicher nicht ganz hinreichend [1]).

Die meisten in Taylor's Formel (6) enthaltenen Gesetze waren schon lange vorher (1636) von Mersenne experimentell entdeckt. Dieselben können folgendermaassen gefasst werden:

1) Für eine gegebene Saite und eine gegebene Spannung ändert sich die Schwingungsdauer wie die Länge.

Dies ist das fundamentale Princip des Monochords; es scheint, als wäre dasselbe schon von den Alten gekannt [2]).

2) Wenn die Länge der Saite gegeben ist, dann ändert sich die Schwingungsdauer umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Spannung.

3) Saiten von derselben Länge und Spannung schwingen in Zeiten, welche den Quadratwurzeln der linearen Dichtigkeit proportional sind.

Diese wichtigen Resultate können sämmtlich auch durch die Methode der Dimensionen erhalten werden, wenn angenommen wird, dass τ nur von l, ϱ und T_1 abhängt.

---

[1]) Dr. Young scheint in seinem Aufsatz von 1800 diesen Punkt ganz richtig verstanden zu haben. Er sagt: Zu gleicher Zeit kann, wie Bernoulli schon richtig beobachtet hat, da man jede Figur mit unendlicher Annäherung zu erhalten vermag, wenn man ihre Ordinaten als zusammengesetzt betrachtet aus einer unendlichen Anzahl von Trochoiden von verschiedener Grösse, es kann dann bewiesen werden, dass alle diese zusammensetzenden Curven in derselben Zeit in ihren Anfangszustand zurückkehren, in welcher eine in eine trochoidale Curve ausgebogene ähnliche Curve eine einzelne Schwingung machen würde; und dies ist in mancher Hinsicht eine zweckmässige und kurze Methode, das Problem zu betrachten.

[2]) Aristoteles weiss, dass eine Pfeife oder eine Saite von doppelter Länge einen Schall hervorbringt, dessen Schwingungen die doppelte Zeit gebrauchen, und dass die Eigenschaften der Concordanz von den Zeittheilen abhängen, welche die Schwingungen der einzelnen Schalle gebrauchen. — Young's Lectures on Natural Philosophy, Vol. I p. 404.

Denn wenn die Einheiten der Länge, Zeit und Masse bezeichnet werden, respective durch $[L]$, $[T_1]$, $[M]$, so werden die Dimensionen dieser Symbole gegeben durch

$$l = [L],\ \varrho = [ML^{-1}],\ T_1 = [MLT^{-2}],$$

und daher (siehe §. 52) ist die einzige Combination derselben, welche eine Zeit darstellen kann, $T_1^{-1/2} \cdot \varrho^{1/2} \cdot l$. Das einzige Unbestimmte bleibt der numerische Factor.

125. Für Mersenne's Gesetze finden wir Beispiele bei allen Saiteninstrumenten. Beim Violinspielen werden verschiedene Klänge von derselben Saite dadurch erhalten, dass wir die wirksame Länge verkleinern. Beim Stimmen der Violine oder des Clavieres wird eine Adjustirung des Tones bei constanter Saitenlänge dadurch erreicht, dass wir die Spannung ändern; man muss dabei aber daran eingedenk bleiben, dass ϱ nicht ganz unverändert ist.

Um mit einer Saite von gegebenem Material sicher nur eine vorgeschriebene Höhe zu erhalten, ist es nothwendig, dass die Länge, die Dicke und die Spannung nur einer Relation genügen; in der Praxis ist hier indessen gewöhnlich kein grosser Spielraum. Die Länge wird oft durch Zweckmässigkeitsgründe begrenzt, ihre Abkürzung kann nicht immer durch einen Zuwachs in der Dicke ausgeglichen werden, weil, wenn die Spannung nicht proportional dem Querschnitt wächst, ein Verlust an Biegsamkeit eintritt, während, wenn die Spannung proportional dem Querschnitt wächst, dadurch nichts in Betreff der Erniedrigung der Tonhöhe erreicht wird. Die Schwierigkeit wird bei den tieferen Saiten des Clavieres und der Violine dadurch vermieden, dass man eine Umwickelung von dünnem Draht hinzufügt, deren Wirkung in der Vergrösserung der Trägheit ohne zu grosse Verminderung der Biegsamkeit besteht.

Zu quantitativen Untersuchungen über die Gesetze der Saiten gebraucht man den Sonometer. Mittelst eines über eine Rolle geschlungenen Gewichtes wird eine Darm- oder Metall-

saite zwischen zwei auf einem Resonanzkasten stehenden Brücken ausgespannt. Eine bewegliche Brücke, deren Stellung auf einer parallel der Saite laufenden Scala abgelesen wird, giebt das Mittel, den wirksamen Theil der Saite um jeden gewünschten Betrag zu verkürzen. Die Schwingungen können durch Reissen, wie bei der Harfe, oder mit einem (gut mit Harz bestrichenen) Bogen, wie bei der Violine, erregt werden.

Wird die bewegliche Brücke gerade mitten zwischen die festen Brücken gestellt, so wird der Klang um die Octave erhöht; wird die Saite auf ein Drittel reducirt, so ist der erhaltene Klang die Duodecime.

Mittelst des Gesetzes der Längen bestimmte Mersenne zum ersten Male die Schwingungszahlen der bekannten musikalischen Klänge. Er glich die Länge einer Saite so lange ab, bis die Tonstufe derselben eine derjenigen wurde, deren Stellung in der musikalischen Scala gesichert war, und dann verlängerte er bei derselben Spannung die Saite, bis die Schwingungen langsam genug waren, um gezählt werden zu können.

Für experimentelle Zwecke ist es zweckmässig, zwei oder mehrere Saiten zu haben, die neben einander gestellt sind und abwechselnd deren Länge, ihre Massen und die Spannungen, denen sie ausgesetzt sind, zu ändern. Damit also zwei Saiten von gleicher Länge das Intervall der Octave geben, müssen ihre Spannungen in dem Verhältnisse von 1 : 4 stehen, wenn die Massen dieselben sind; oder es müssen, wenn die Spannungen dieselben sind, die Massen in dem reciproken Verhältnisse zu einander stehen.

Der Sonometer ist sehr zweckmässig für die numerische Bestimmung der Höhe. Durch Aenderung der Spannung wird die Saite bis zum Unisono mit einer Stimmgabel oder einem andern Vergleichsinstrument mit bekannter Schwingungszahl abgestimmt; darauf wird durch passende Verschiebung der beweglichen Brücke die Länge der Saite bestimmt, welche im Unisono mit irgend einem zu messenden Klange steht. Das Gesetz der Längen giebt dann die Mittel an die Hand, die gewünschte Vergleichung der Schwingungsanzahlen auszuführen.

Wichtig ist eine andere Anwendung von Scheibler zur Bestimmung der absoluten Tonhöhe. Das Princip ist dasselbe, wie das in Capitel III auseinander gesetzte; die Methode beruht auf der Ableitung der absoluten Höhe zweier Tonstufen, aus der Kenntniss sowohl des Verhältnisses wie der Differenz ihrer Schwingungszahlen. Es werden sorgfältig die Längen der Sonometersaite gemessen einmal, wenn dieselbe im Unisono mit einer Stimmgabel steht, und dann, wenn sie vier Schwebungen in der Secunde mit derselben giebt. Das Verhältniss der Längen ist das umgekehrte Verhältniss der Schwingungszahlen, die Differenz der Schwingungszahlen ist vier. Aus diesen Daten kann die absolute Tonhöhe der Stimmgabel berechnet werden.

Die Tonhöhe einer Saite kann ebenso nach Taylor's Formel aus den mechanischen Elementen des Systems berechnet werden; indessen sind hier grosse Vorsichtsmaassregeln nothwendig, um sich wirkliche Genauigkeit zu sichern. Die Spannung wird durch ein Gewicht hervorgebracht, dessen Masse (in derselben Einheit wie ϱ ausgedrückt) P sein mag, so dass $T_1 = gP$, wo $g = 9{,}8$ ist, wenn die Einheiten der Länge und Zeit resp. Meter und Secunde sind. Um sicher zu sein, dass die ganze Spannung auf den schwingenden Theil wirkt, darf keine Brücke eingeschoben werden, eine Bedingung, die nur erfüllt werden kann, wenn man die Saite vertical aufhängt. Nachdem das Gewicht angehängt ist, wird ein Theil der Saite für sich isolirt, indem man dieselbe in zwei Punkten fest einklemmt; darauf wird die Länge dieses Theiles gemessen. Die Masse ϱ der Längeneinheit bezieht sich auf den gestreckten Zustand der Saite und kann indirect gefunden werden durch die Beobachtung der Verlängerung, welche durch eine Spannung von derselben Grössenordnung wie T_1 hervorgerufen wird und Vergleichung dieser Verlängerung mit der nach Hooke's Gesetz durch T_1 hervorgerufenen; dazu muss dann noch eine bekannte Länge der Saite in deren Normalzustand gewogen werden. Nachdem man die Klemmen sicher festgemacht hat, muss man grosse Sorgfalt darauf verwenden, Temperaturschwankun-

gen zu verhindern, da diese die Spannung ernstlich beeinflussen. Auf diese Weise erhielt Seebeck sehr genaue Resultate.

126. Wenn eine Saite in ihrer tiefsten Normalbewegungsart schwingt, so ist der Ausschlag in jedem Momente proportional $\sin\frac{\pi x}{l}$, derselbe wächst von jedem der beiden Enden nach der Mitte hin; kein zwischenliegender Punkt der Saite bleibt permanent in Ruhe. Anders ist es aber bei den höheren Normalcomponenten. Wenn die Schwingung von der durch:

$$y = \sin\frac{s\pi x}{l}\left(A_s\cos\frac{s\pi at}{l} + B_s\sin\frac{s\pi at}{l}\right)$$

angegebenen Art ist, so ist der Ausschlag proportional $\sin\frac{s\pi x}{l}$, welcher Werth in $s - 1$ Punkten verschwindet, die die Saite in s gleiche Theile eintheilen. Diese Punkte, wo keine Bewegung stattfindet, werden Knotenpunkte genannt und können augenscheinlich berührt oder festgehalten werden, ohne auf irgend eine Weise die Schwingung zu stören. Die Hervorbringung von harmonischen Obertönen durch Berührung der Saite in den aliquoten Theilungspunkten derselben ist ein wohl bekanntes Hülfsmittel des Violinspielers. Alle einzelnen Bewegungsarten sind ausgeschlossen, welche in dem berührten Punkte keinen Knotenpunkt haben, so dass in Betreff der Höhe die Wirkung dieselbe ist, als wenn die Saite dort sicher befestigt wäre.

127. Die Constanten, welche in dem allgemeinen Werth von y, §. 124, auftreten, hängen von den speciellen Umständen der Schwingung ab und können in Ausdrücken der Anfangswerthe von y und $\dot{y}$ bestimmt werden.

Setzen wir $t = 0$, so finden wir:

$$y_0 = \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s\sin\frac{s\pi x}{l};$$
$$\dot{y}_0 = \frac{\pi a}{l}\sum_{s=1}^{s=\infty} sB_s\sin\frac{s\pi x}{l} \quad \ldots\ldots (1).$$

Multipliciren wir mit $sin\,\frac{s\pi x}{l}$, und integriren wir von 0 bis l, so erhalten wir:

$$A_s = \frac{2}{l}\int_0^l y_0\,sin\,\frac{s\pi x}{l}\,dx;$$
$$B_s = \frac{2}{\pi a s}\int_0^l \dot{y}_0\,sin\,\frac{s\pi x}{l}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Diese Resultate sind ein Beispiel von Stokes' Gesetz, §. 95; denn der Theil, welcher von den Anfangsgeschwindigkeiten abhängt, ist:

$$y = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2}{\pi a s}\,sin\,\frac{s\pi x}{l}\,sin\,\frac{s\pi a t}{l}\int_0^l \dot{y}_0\,sin\,\frac{s\pi x}{l}\,dx,$$

und hieraus kann der von den Anfangsverschiebungen abhängige Theil durch Differentiation nach der Zeit und Ersetzung von y_0 für $\dot{y}_0$ abgeleitet werden.

Wenn die Zustandsbedingungen der Saite in irgend einem Momente vollständig bekannt sind, so gestatten diese Formeln die Bewegung für alle folgenden Zeitmomente zu berechnen. Es befinde sich z. B. die Saite Anfangs in Ruhe und sei so geformt, dass sie die beiden Seiten eines Dreiecks bildet. Dann ist $B_s = 0$ und

Fig. 20.

$$A_s = \frac{2\gamma}{l}\left\{\int_0^b \frac{x}{b}\,sin\,\frac{s\pi x}{l}\,dx + \int_b^l \frac{l-x}{l-b}\,sin\,\frac{s\pi x}{l}\,dx\right\}$$
$$= \frac{2\gamma l^2}{\pi^2 s^2 b\,(l-b)}\,sin\,\frac{s\pi b}{l} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

nach ausgeführter Integration.

Wir sehen, dass A_s verschwindet, wenn $\sin \frac{s\pi b}{l} = 0$, d. i. wenn sich in P ein Knotenpunkt der in Frage stehenden Componente befindet. Von einem umfassenderen Gesichtspunkte aus wird der obige Gegenstand in einer andern Lösungsart behandelt, die wir gleich geben werden.

128. In dem Ausdrucke für y sind die Coefficienten von $\sin \frac{s\pi x}{l}$ die Normalcoordinaten der Capitel IV und V. Wir wollen dieselben daher mit φ_s bezeichnen, so dass die Configuration und die Bewegung des Systems in jedem Momente durch die Werthe von φ_s und $\dot{\varphi}_s$ nach folgender Gleichung definirt sind:

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots + \varphi_s \sin \frac{s\pi x}{l} + \cdots \\ \dot{y} &= \dot{\varphi}_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \dot{\varphi}_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots + \dot{\varphi}_s \sin \frac{s\pi x}{l} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1).$$

Wir gehen nun weiter so vor, dass wir die Ausdrücke für T und V bilden und daraus die Normal-Schwingungsgleichungen ableiten.

Für die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int_0^l \dot{y}^2 \, dx = \frac{1}{2} \varrho \int_0^l \left\{ \sum_{s=1}^{s=\infty} \dot{\varphi}_s \sin \frac{s\pi x}{l} \right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \varrho \int_0^l \sum_{s=1}^{s=\infty} \dot{\varphi}_s^2 \sin^2 \frac{s\pi x}{l} \, \delta x,$$

da das Product jedes Paares von Gliedern wegen der allgemeinen Eigenschaft der Normalcoordinaten verschwindet. Daraus:

$$T = \frac{1}{4} \varrho l \sum_{s=1}^{s=\infty} \dot{\varphi}_s^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$V = \frac{1}{2} T_1 \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} T_1 \int_0^l \left\{\sum_{s=1}^{s=\infty} \varphi_s \frac{s\pi}{l} \cos \frac{s\pi x}{l}\right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} T_1 l \,.\, \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s^2\pi^2}{l^2} \varphi_s^2 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Diese Ausdrücke setzen keine irgendwie besondere Bewegung voraus, weder eine natürliche noch sonstige; wir können dieselben aber dazu verwenden, die ganze Energie einer natürlich schwingenden Saite zu berechnen, und zwar wie folgt: Ist M die ganze Masse der Saite (ϱl) und wird für T_1 sein Aequivalent ($a^2 \varrho$) eingesetzt, so finden wir für die Summe der beiden Energien:

$$T + V = \frac{1}{4} M \,.\, \sum_{s=1}^{s=\infty} \left\{\dot{\varphi}_s^2 + \frac{s^2\pi^2 a^2}{l^2} \varphi_s^2\right\} \ . \ . \ . \ (4),$$

oder in Ausdrücken von A_s und B_s aus §. 126:

$$T + V = \pi^2 M \,.\, \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s^2 + B_s^2}{\tau_s^2} \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wenn die Bewegung nicht auf eine Ebene xy begrenzt ist, so haben wir nur die Energie der Schwingung in der dazu senkrechten Ebene hinzuzuaddiren.

Lagrange's Methode giebt sofort die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi}_s + \left(\frac{s\pi a}{l}\right)^2 \varphi_s = \frac{2}{l\varrho} \Phi_s \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

welche schon in §. 66 durchgenommen wurde. Sind φ_0 und $\dot{\varphi}_0$ die Anfangswerthe von φ und $\dot{\varphi}$, so ist die allgemeine Lösung:

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 \frac{\sin nt}{n} + \varphi_0 \cos nt$$

$$+ \frac{2}{l\varrho n} \int_0^t \sin n\,(t - t')\, \Phi\, dt' \ . \ . \ (7),$$

worin n für $\frac{s\pi a}{l}$ geschrieben ist.

Nach der Definition hat Φ_s einen solchen Werth, dass $\Phi_s \delta \varphi_s$ die von den äusseren Kräften während der Verschiebung $\delta \varphi_s$ geleistete Arbeit ist. Wenn daher die zur Zeit t auf ein Element ϱdx der Saite wirkende Kraft $\varrho Y dx$ ist, so haben wir:

$$\Phi_s = \int_0^l \varrho Y \sin \frac{s\pi x}{l}\, dx \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

In diesen Gleichungen ist, wie wir aus (1) sehen, φ_s eine lineare Grösse, und daher ist Φ_s eine Kraft der gewöhnlichen Art.

129. Bei den Anwendungen, welche wir von diesen Resultaten zu machen haben, werden wir annehmen, dass die einzig wirkende äussere Kraft in der unmittelbaren Nähe eines Punktes $x = b$ angreift; sie kann dann gewöhnlich als ein Ganzes, nur in einem einzigen Punkte wirkend, angesehen werden, so dass:

$$\Phi_s = \sin \frac{s\pi b}{l} \int \varrho Y dx \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Wenn der Angriffspunkt der Kraft mit einem Knotenpunkt der Schwingungsart (s) zusammenfällt, so ist $\Phi_s = 0$ und wir lernen hieraus, dass eine solche Kraft ganz ohne Einfluss auf die in Frage stehende Schwingungscomponente ist. Dieses Princip ist von grosser Wichtigkeit; es zeigt z. B., dass wenn eine Saite in ihrer Gleichgewichtslage in Ruhe ist, keine Kraft, welche in dem Mittelpunkte der Saite angreift, weder eine zupfende, noch streichende, noch biegende Kraft irgend eine der geraden Normalcomponenten erregen kann[1]). Wenn nach der Einwirkung der Kraft ihr Angriffspunkt gedämpft wird, indem wir ihn etwa mit dem Finger berühren, muss sofort jede Bewegung aufhören; denn die Componenten, welche in dem fraglichen Punkte keinen Knotenpunkt haben, werden

[1]) Die Beobachtung, dass ein bestimmter harmonischer Oberton nicht entsteht, wenn einer seiner Knotenpunkte gezupft wird, verdankt man Young.

durch die Dämpfung eingehalten, während die, welche dort einen Knotenpunkt haben, von Anfang an nicht vorhanden sind[1]). Wir halten allgemein durch Festhalten irgend eines Punktes einer schwingenden Saite alle diejenigen Schwingungscomponenten an, welche dort einen Knotenpunkt nicht haben, und lassen diejenigen, welche in dem berührten Punkte einen Knotenpunkt haben, vollständig unbeeinflusst.

Den Fall einer Saite, die in einem Punkte nach der Seite gezogen und dann aus ihrer Ruhe fahrengelassen wird, kann man in diesen Auseinandersetzungen eingeschlossen annehmen. Die vollständige Lösung erhalten wir folgendermaassen. Die Bewegung beginne zur Zeit $t = 0$; von diesem Momente an ist $\Phi_s = 0$. Der Werth von φ_s zur Zeit t ist:

$$\varphi_s = (\varphi_s)_0 \cos nt + \frac{1}{n} (\dot{\varphi}_s)_0 \sin nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $(\varphi_s)_0$ und $(\dot{\varphi}_s)_0$ die Anfangswerthe der mit dem Index s versehenen Grössen sind. Nun ist in dem vorliegenden Problem $(\dot{\varphi}_s)_0 = 0$ und $(\varphi_s)_0$ ist bestimmt durch:

$$n^2 (\varphi_s)_0 = \frac{2}{l\varrho} \Phi_s = \frac{2}{l\varrho} Y' \sin \frac{s\pi b}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wenn Y' die Kraft bedeutet, mit welcher die Saite im Punkte b zur Seite gezogen ist. Daher ist zur Zeit t:

$$\varphi_s = \frac{2}{l\varrho n^2} Y' \sin \frac{s\pi b}{l} \cos nt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

und nach (1) des §. 128:

$$y = \frac{2}{l\varrho} Y' . \sum_{s=1}^{s=\infty} \sin \frac{s\pi b}{l} \sin \frac{s\pi x}{l} \frac{\cos nt}{n^2} \quad . \quad . \quad (5),$$

worin $n = \frac{s\pi a}{l}$.

Die Symmetrie des Ausdrucks (5) in Bezug auf x und y ist ein Beispiel des Princips des §. 107.

---

[1]) Ein gleiches Resultat ergiebt sich, wenn der gedämpfte Punkt in derselben Entfernung von dem einen Ende der Saite ist, wie der Erregungspunkt von dem andern Ende.

Das Problem, die Bewegung einer Saite zu bestimmen, welche durch eine im Punkte b wirkende äussere Kraft in Schwingung versetzt wird, kann auf ähnliche Weise behandelt werden. Integriren wir Gleichung (6) des §. 128 über die Zeit der Dauer des Impulses, so finden wir schliesslich mit denselben Bezeichnungen wie vorher:

$$(\dot{\varphi}_s)_0 = \frac{2}{l\varrho} \sin \frac{s\pi b}{l} Y_1,$$

wenn $\int Y' dt$ durch Y_1 bezeichnet wird. Zu gleicher Zeit ist $(\varphi_s)_0 = 0$, so dass nach (2) zur Zeit t ist:

$$y = \frac{2 Y_1}{l\varrho} \sum_{s=1}^{s=\infty} \sin \frac{s\pi b}{l} \sin \frac{s\pi x}{l} \frac{\sin nt}{n} \quad . \ . \ (6).$$

Die Reihe der Schwingungscomponenten ist, wie die vorstehenden Ausdrücke zeigen, für eine geschlagene Saite weniger convergent wie für eine gezupfte. Der Grund hierzu ist der, dass in dem letztern Falle der Anfangswerth von y continuirlich ist, und nur $\frac{dy}{dx}$ discontinuirlich, während in dem ersteren Falle $\dot{y}$ selbst einen plötzlichen Sprung macht. Siehe §§. 32, 101.

Das Problem einer durch einen Impuls in Bewegung gesetzten Saite kann ebenso durch die allgemeinen Formeln (7) und (8) des §. 128 gelöst werden. Die Kraft findet die Saite zur Zeit $t = 0$ in Ruhe und wirkt dann während einer unendlich kleinen Zeit von $t = 0$ bis $t = \tau'$. Daher verschwinden $(\varphi_s)_0$ und $(\dot{\varphi}_s)_0$ und es reducirt sich (7) des §. 128 auf:

$$\varphi_s = \frac{2}{l\varrho n} \sin nt \int_0^{\tau'} \Phi_s dt',$$

während nach (8) des §. 128:

$$\int_0^{\tau'} \Phi_s dt' = \sin \frac{s\pi b}{l} \int_0^{\tau'} Y' dt' = \sin \frac{s\pi b}{l} Y_1.$$

Daher ist, wie vorher:

$$\varphi_s = \frac{2}{l\varrho n} Y_1 \sin \frac{s\pi b}{l} \sin nt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Bis hierher setzten wir voraus, dass die bewegende Kraft in einem einzigen Punkte concentrirt sei. Wenn sie über eine Distanz β zu beiden Seiten von b vertheilt wäre, so brauchen wir bloss die Ausdrücke (6) und (7) mit Bezug auf b zu integriren und, z. B., in (7) an die Stelle von $Y_1 \sin \frac{s\pi b}{l}$ zu setzen:

$$\int_{b+\beta}^{b+\beta} Y_1' \sin \frac{s\pi b}{l}\, db.$$

Ist Y_1' innerhalb der Grenzen constant, so reducirt sich dieses Integral auf:

$$Y_1' \frac{2l}{s\pi} \sin \frac{s\pi\beta}{l} \sin \frac{s\pi b}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Die hauptsächliche Wirkung der Vertheilung der Kraft ist also, die Reihe für y convergenter zu machen.

130. Das Problem, auf welches wir nun zunächst unsere Aufmerksamkeit lenken wollen, ist das der Schwingung der Klaviersaiten. Die Ursache der Schwingung ist hier der Anschlag eines Hammers, welcher gegen die Saite geschlagen wird und nach dem Stosse zurückspringt. Indessen würde jetzt die Annahme, welche wir in dem letzten Abschnitt machten, dass nämlich die gegenseitige Einwirkung eine so kurze Zeit einnimmt, dass ihre Dauer vernachlässigt werden kann, nicht gerechtfertigt sein. Wenn wir mit den Maassen des gewöhnlichen Lebens messen, so ist die Dauer der Berührung allerdings sehr klein, hier muss aber die Vergleichung mit den natürlichen Perioden der Saite stattfinden. Die zum Schlagen der Klaviersaiten gewöhnlich benutzten Hämmer sind mit verschiedenen Lagern von Leder bedeckt zum ausdrücklichen Zwecke, dieselben nachgiebiger zu machen, wodurch der Contact verlängert wird. Die strenge Behandlung des Problems würde schwierig sein und die Lösung, wenn sie sich überhaupt erhalten liesse, vermuthlich zu complicirt, um von Nutzen zu sein; durch Einführung einer ge-

wissen Vereinfachung hat aber Helmholtz eine Lösung erhalten, welche alle wesentlichen Züge des vorliegenden Falles wiedergiebt. Er bemerkt, dass, weil das thatsächlich stattfindende Nachgeben der Saite klein sein muss im Vergleich mit dem Nachgeben der Hammerpolsterung, das Gesetz der während des Contactes ins Spiel tretenden Kraft nahezu dasselbe sein wird, wie wenn die Saite absolut fest wäre; und in diesem Falle würde die Kraft sehr nahe sich wie eine Kreisfunction ändern. Wir wollen daher annehmen, dass zur Zeit $t = 0$, wo keine Geschwindigkeiten oder Verschiebungen vorhanden sind, eine Kraft $F \sin pt$ auf die Saite im Punkte $x = b$ zu wirken beginnt und während einer halben Periode der Kreisfunction andauert, das ist, bis $t = \frac{\pi}{p}$. Nach dieser Zeit ist die Saite wieder frei. Die Grösse von p hängt von der Masse und Elasticität des Hammers ab, aber innerhalb weiter Grenzen nicht von der Geschwindigkeit, mit welcher derselbe auf die Saite schlägt.

Die gesuchte Lösung erhalten wir sofort, wenn wir für Φ_s in der allgemeinen Formel (7) des §. 128 den durch:

$$\Phi_s = F \sin \frac{s\pi b}{l} \sin pt' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegebenen Werth einsetzen; die Grenzen des Integrals sind dabei 0 und $\frac{\pi}{p}$. Wir finden (zur Zeit $t > \frac{\pi}{p}$):

$$\varphi_s = \frac{2F}{l n \varrho} \sin \frac{s\pi b}{l} \int_0^{\frac{\pi}{p}} \sin n\,(t - t') \sin pt'\, dt'$$

$$= \frac{4p \cos \frac{n\pi}{2p}}{l\varrho n\,(p^2 - n^2)} \,.\, F \sin \frac{s\pi b}{l} \,.\, \sin n \left(t - \frac{\pi}{2p}\right) . \quad . \quad . \quad (2);$$

die schliessliche Lösung für y wird, wenn wir für n und ϱ deren Werthe einsetzen:

$$y = \frac{4apl^2F}{\pi T_1} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\cos \frac{s\pi^2 a}{2pl} \cdot \sin \frac{s\pi b}{l}}{s\,(l^2p^2 - s^2a^2\pi^2)} \sin \frac{s\pi x}{l} \sin \frac{s\pi a}{l}\left(t - \frac{\pi}{2p}\right) \quad . \quad . \quad (3).$$

Wir sehen, dass alle Componenten verschwinden, welche in dem Erregungspunkte einen Knotenpunkt haben; dieser Schluss hängt aber nicht von irgend einem besonderen Gesetze der Kraft ab. Das Interesse der vorliegenden Lösung liegt in dem, was wir daraus über die Abhängigkeit der resultirenden Schwingung von der Contactdauer schliessen können. Bezeichnen wir das Verhältniss dieser Dauer zu der Fundamentalperiode mit v, so dass $v = \pi a : 2pl$, so wird der Ausdruck für die Amplitude der Componente s:

$$\frac{8Fl}{\pi^2 T_1} \cdot \frac{v \cos(s\pi v)}{s(1 - 4s^2v^2)} \sin \frac{s\pi b}{l} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Wir kommen zu dem Falle eines Impulses wieder zurück, wenn wir $v = 0$ setzen und:

$$Y_1 = \int_0^{\frac{\pi}{p}} F \sin pt\, dt = \frac{2F}{p}.$$

Ist v endlich, so verschwinden die Componenten, deren Perioden $^2/_3$, $^2/_5$, $^2/_7$ ... der Dauer des Contactes sind; ist s sehr gross, so convergirt die Reihe mit s^{-3}. Man muss ebenso die endliche Breite des Hammers etwas berücksichtigen, deren Wirkung ebenfalls die ist, die Convergenz der Reihe zu erhöhen.

Die Gesetze der Schwingungen von Saiten können wenigstens in ihren Hauptzügen durch optische Beobachtungsmethoden verificirt werden — entweder mit dem Vibrationsmikroskop oder durch einen dem Charakter der Schwingung folgenden Zeichenstift auf einer sich drehenden Trommel. Dieser Charakter hängt von zwei Dingen ab — der Art der Erregung und dem Punkte, dessen Bewegung zur Beobchtung ausersehen wird. Diejenigen Componenten erscheinen nicht, welche entweder in dem Erregungspunkte oder in dem Beobachtungspunkte einen Knotenpunkt haben. Die ersteren sind nicht erregt und die letzteren zeigen sich eben von selbst nicht. Daher wird die einfachste Bewegung dadurch erhalten, dass die Saite im Mittelpunkt gerissen und an einem der Punkte der Dreitheilung beobachtet wird, oder *vice versa*. In diesem Falle ist der

erste harmonische Oberton, welcher die Reinheit der Hauptschwingung beeinträchtigt, die fünfte Componente, dessen Intensität für gewöhnlich nicht dazu hinreicht, eine grosse Störung zu verursachen. In einem spätern Capitel wollen wir die Resultate der dynamischen Theorie mit den Beobachtungen vergleichen, aber mehr unter dem Gesichtspunkte, die Gesetze des Hörens zu entdecken und zu prüfen, als unter dem, die Theorie selbst zu bestätigen.

131. Der Fall einer periodisch wirkenden Kraft ist in der allgemeinen Lösung des §. 128 eingeschlossen; wir ziehen indessen vor, eine etwas verschiedene Methode hierfür zu befolgen, um diesen Fall noch in anderer Richtung auszudehnen. Bis jetzt ist keine Rücksicht auf dissipative Kräfte genommen; wir wollen nun dagegen annehmen, dass die Bewegung jedes Elementes der Saite einen Widerstand erfährt durch eine Kraft, welche proportional seiner Geschwindigkeit ist. Die partielle Differentialgleichung wird dann:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varkappa \frac{dy}{dt} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2} + Y \quad \dots \dots \quad (1),$$

mit Hülfe welcher diese Aufgabe behandelt werden kann. Es ist indessen einfacher, von den Resultaten des letzten Capitels Nutzen zu ziehen, indem man darauf achtet, dass in dem vorliegenden Falle die Reibungsfunction von derselben Form wie T ist. In der That ist:

$$F = \frac{1}{4} \varkappa l \, . \sum_{s=1}^{s=\infty} \dot{\varphi}_s^2 \quad \dots \dots \quad (2),$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ die Normalcoordinaten sind, durch deren Hülfe T und V auf Summen von Quadraten reducirt werden. Die Bewegungsgleichungen sind daher einfach:

$$\ddot{\varphi}_s + \varkappa \dot{\varphi}_s + n^2 \varphi_s = \frac{2}{l\varrho} \Phi_s \quad \dots \dots \quad (3)$$

von derselben Form, welche wir für Systeme mit nur einem Grade von Freiheit erhalten haben. Es ist nur noch nöthig, dem, was in Capitel III ausgesprochen wurde, hinzuzufügen, dass die natürlichen Schwingungen, da $\varkappa$ unabhängig von s

ist, auf solche Weise abnehmen, dass die Amplituden ihre relativen Werthe beibehalten.

Wirkt eine periodische Kraft $F \cos pt$ in einem einzelnen Punkte, so haben wir:

$$\Phi_s = F \sin \frac{s\pi b}{l} \cos pt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4),$$

und aus §. 46:

$$\varphi_s = \frac{2 F \sin \varepsilon}{l \varrho p \varkappa} \sin \frac{s\pi b}{l} \cos (pt - \varepsilon) \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

worin:

$$\tang \varepsilon = \frac{p \varkappa}{n^2 - p^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Ist unter den natürlichen Perioden irgend eine, welche nahezu isochron mit $\cos pt$ ist, so wird die Schwingung dieser Art sehr stark werden, wenn nicht etwa der Erregungspunkt zufällig nahe neben einen Knotenpunkt dieser Schwingung fällt. In dem Falle eines genauen Zusammenfallens dieser Punkte verschwindet die in Frage stehende Componente, denn keine in dem Knotenpunkt angebrachte Kraft kann jene erregen bei Geltung des genannten Reibungsgesetzes, das indessen, wie wohl bemerkt werden mag, in seinem Charakter sehr speciell ist. Ist keine Reibung vorhanden, so ist $\varkappa = 0$ und

$$l \varrho \varphi_s = \frac{2 F}{n^2 - p^2} \sin \frac{s\pi b}{l} \cos pt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7);$$

dadurch würde bei vollkommenem Isochronismus die Schwingung unendlich, wenn nicht $\sin \frac{s\pi b}{l} = 0$.

Der Werth von y ist hier, wie gewöhnlich:

$$y = \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \varphi_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \; . \; . \; . \quad (8).$$

132. Die vorstehende Lösung ist ein Beispiel für den Gebrauch der Normalcoordinaten bei einem Problem über erzwungene Schwingungen. Natürlich sind dieselben viel eingehender bei freien Schwingungen anwendbar; sie können allgemein mit Nutzen überall da verwandt werden, wo das System nach Ein-

wirkung verschiedener Kräfte schliesslich sich selbst überlassen wird. Wir haben schon Beispiele dieser Anwendung gehabt.

Bei Schwingungen, die durch periodische Kräfte hervorgerufen werden, liegt ein Vortheil des Gebrauchs der Normalcoordinaten in der Leichtigkeit der Vergleichung mit der Gleichgewichtstheorie, welche ja, wie der Leser sich erinnern wird, die Theorie der Bewegung unter der Voraussetzung ist, dass die Trägheit des Systems ausser Rechnung gelassen wird. Wenn die Werthe der Normalcoordinaten φ_s nach der Gleichgewichtstheorie $A_s \cos pt$ sind, so wird der wirkliche Werth gegeben durch:

$$\varphi_s = \frac{n^2 A_s}{n^2 - p^2} \cos pt \quad \text{. . . . .} \quad (1),$$

so dass, wenn das Resultat der Gleichgewichtstheorie bekannt ist und leicht in Ausdrücken der Normalcoordinaten ausgedrückt werden kann, die wahre Lösung mit Einschluss der Wirkungen der Trägheit sofort hingeschrieben werden kann.

Bei dem vorliegenden Beispiel wird, wenn eine Kraft $F \cos pt$ von sehr langer Periode am Punkte b der Saite einwirkt, das Resultat der Gleichgewichtstheorie, gemäss welcher die Saite in jedem Momente aus zwei geraden Theilen bestehen würde, sein:

$$l \varrho \varphi_s = \frac{2F}{n^2} \sin \frac{s\pi b}{l} \cos pt \quad \text{. . . . .} \quad (2),$$

aus welchem das wirkliche Resultat für alle Werthe von p dadurch abgeleitet wird, dass man einfach $n^2 - p^2$ an die Stelle von n^2 schreibt.

Der Werth von y in diesem und ähnlichen Fällen kann indessen auch in endlichen Ausdrücken erhalten werden; die Schwierigkeit, den endlichen Ausdruck zu finden, ist gewöhnlich nicht grösser als die, die Form der Normalfunctionen bei einem freien System zu finden. So setzen wir in der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Y,$$

voraus, dass y mit $\cos mat$ variirt. Die erzwungene Schwingung wird dann der Gleichung genügen:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + m^2 y = -\frac{1}{a^2} Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ist $Y = 0$, so erfordert die Aufsuchung der Normalfunctionen die Lösung von:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + m^2 y = 0,$$

und eine darauf folgende Bestimmung für m, um die Grenzbedingungen zu erfüllen. In dem Problem der erzwungenen Schwingungen ist m gegeben, wir haben dann nur jede particuläre Lösung von (3) durch die complementäre Function, welche zwei willkürliche Constanten enthält, zu ergänzen. Diese Function hat, welches auch immer der Werth von m und des Verhältnisses der Constanten sein mag, dieselbe Form, wie die Normalfunctionen; alles was noch zu thun übrig bleibt, ist die Bestimmung der beiden Constanten in Uebereinstimmung mit den vorgeschriebenen Grenzbedingungen, welchen die vollständige Lösung genügen muss. Aehnliche Betrachtungen treffen bei jedem continuirlichen System zu.

133. Wenn eine periodische Kraft in einem Punkte angebracht wird, so sind hier zwei verschiedene Probleme zu betrachten; das erste tritt auf, wenn in dem Punkte $x = b$ eine gegebene periodische Kraft wirkt; das zweite, wenn das, was obligatorisch ist, die wirkliche Bewegung des Punktes ist. Es wird indessen zweckmässig sein, beide zusammen zu behandeln.

Die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varkappa \frac{dy}{dt} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wird über beide Theile hindurch, in welche die Saite in b getrennt wird, erfüllt, wird dagegen verletzt beim Uebergange von dem einen zum andern.

Um einen Wechsel in den willkürlichen Constanten zu ermöglichen, müssen wir daher verschiedene Ausdrücke

für y annehmen und später die beiden Bedingungen einführen, welche in dem Verbindungspunkte erfüllt sein müssen. Diese sind:

1) dass keine discontinuirliche Aenderung in dem Werth von y eintritt;
2) dass die Resultante der in b wirkenden Spannungen sich mit der äusseren Kraft das Gleichgewicht hält.

Wenn $F\cos pt$ die Kraft ist, giebt demnach die zweite Bedingung:

$$T_1 \triangle \left(\frac{dy}{dx}\right) + F\cos pt = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

worin $\triangle \left(\frac{dy}{dx}\right)$ die Aenderung in dem Werthe von $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ bezeichnet, welche eintritt, wenn man den Punkt $x = b$ in der positiven Richtung passirt.

Wir werden es indessen vortheilhaft finden, $\cos pt$ durch die complexe Exponentialfunction e^{ipt} zu ersetzen und schliesslich den imaginären Theil wegzulassen, wenn die symbolische Lösung vollendet ist. Unter der Annahme, dass y sich wie e^{ipt} ändert, wird die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

worin λ^2 die complexe Constante ist:

$$\lambda^2 = \frac{1}{a^2}(p^2 - ip\varkappa) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die allgemeinste Lösung von (3) besteht aus zwei Ausdrücken, die resp. $\sin \lambda x$ und $\cos \lambda x$ proportional sind; indessen zeigt die $x = 0$ zu erfüllende Bedingung, dass der zweite Ausdruck hier nicht auftritt. Ist daher γe^{ipt} der Werth von y in $x = b$, so ist:

$$y = \gamma \frac{\sin \lambda x}{\sin \lambda b} \cdot e^{ipt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

die Lösung, welche zu dem ersten Theil der Saite gehört, der sich von $x = 0$ bis $x = b$ erstreckt. Auf gleiche Weise ergiebt es sich klar, dass wir für den zweiten Theil haben werden:

$$y = \gamma \frac{\sin \lambda (l - x)}{\sin \gamma (l - b)} e^{ipt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Ist γ gegeben, so bilden diese Gleichungen die symbolische Lösung des Problems; wenn indessen die Kraft das Gegebene ist, so ist es noch erforderlich, die Beziehung zwischen derselben und γ zu kennen.

Die Differentiation von (5) und (6) und die Einsetzung des so gefundenen $\Delta \frac{dy}{dx}$ in (2) giebt:

$$\gamma = \frac{F}{T_1} \frac{\sin \lambda b \sin \lambda (l - b)}{\lambda \sin \lambda l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Daher ist:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{F}{T_1} \frac{\sin \lambda x \sin \lambda (l - b)}{\lambda \sin \lambda l} e^{ipt} \\ &\qquad \text{von } x = 0 \text{ bis } x = b \\ y &= \frac{F}{T_1} \frac{\sin \lambda (l - x) \sin \lambda b}{\lambda \sin \lambda l} e^{ipt} \\ &\qquad \text{von } x = b \text{ bis } x = l \end{aligned} \right\} \ldots (8)^{1)}.$$

Diese Beispiele enthalten eine Anwendung des im letzten Capitel bewiesenen allgemeinen Reciprocitätsgesetzes. Denn aus ihnen geht hervor, dass die der in b wirkenden Kraft zu verdankende Bewegung in x dieselbe sein würde, wie die, welche in b erfolgt wäre, wenn die Kraft in x eingewirkt hätte.

Bei der Discussion der Lösung wollen wir zuerst den Fall nehmen, wo keine Reibung vorhanden ist. Der Coefficient $\varkappa$ ist dann Null, während λ reell und gleich $p : a$ ist. Der reelle Theil der Lösung, welcher der Kraft $F \cos pt$ entspricht, wird gefunden, indem man einfach $\cos pt$ für e^{ipt} in (8) einsetzt; es scheint indessen kaum nothwendig, die Gleichungen wegen einer so kleinen Aenderung noch einmal hinzuschreiben. Dieselbe Bemerkung findet ihre Anwendung auf erzwungene Bewegungen, die in Ausdrücken von γ gegeben sind.

Es ergiebt sich deutlich, dass die Bewegung bei einer Kraft, welche mit einer der natürlichen Schwingungen der

---

1) Donkin's Acoustics, p. 121.

ganzen Saite isochron ist, unendlich wird, wenn nicht der Angriffspunkt gerade in einem Knotenpunkt liegt; in Praxis ist es aber nicht leicht, eine solche Anordnung zu treffen, dass eine Saite von einer Kraft von gegebener Grösse dauernd angegriffen wird. Die beste Methode ist vielleicht die, eine kleine Eisenmenge anzuhängen, die periodisch von einem Electromagnet angezogen wird, dessen Umwindungen von einem intermittirenden Strom durchflossen werden. Indess müsste, wenn nicht irgend ein Compensationsmittel ersonnen wird, diese Eisenmasse sehr klein sein, um ihre Trägheit, welche eine neue Complicirung einführen würde, vernachlässigen zu können.

Eine bessere Annäherung kann man in dem Falle erlangen, wo eine obligatorische Bewegung der Saite auferlegt wird. Eine massive Stimmgabel von niedriger Tonhöhe, die durch einen Bogen gestrichen oder durch Electromagnetismus in dauernder Schwingung erhalten wird, vollführt ihre Schwingungen annähernd ganz unabhängig von den Einwirkungen irgend welcher leichter Körper, die mit ihr verbunden sein können. Um daher irgend einen Punkt einer Saite einer obligatorischen Bewegung zu unterwerfen, ist es nur nöthig, denselben an das Ende einer der Zinken einer solchen Gabel zu befestigen, deren Schwingungsebene senkrecht zu der Länge der Saite ist. Es scheint, dass diese Methode, die erzwungenen Schwingungen einer Saite herzustellen, zuerst von Melde benutzt wurde.

Ein anderes für Beobachtungen mit dem Ohr besser geeignetes Arrangement ist von Helmholtz angewandt worden. Das Ende des Stieles einer starken Stimmgabel, welche mit einem Bogen oder auf sonst eine Weise in Schwingung versetzt ist, wird gegen die Saite gepresst. Es ist zweckmässig, die Oberfläche, welche mit der Saite in Berührung kommt, in einer geeigneten Form (Sattelform) auszufeilen, um desto besser das Ausgleiten und Schnarren zu verhindern.

Mit Rücksicht auf (5) sehen wir, dass wenn $\sin \lambda b$ verschwindet, die Bewegung (gemäss dieser Gleichung) unendlich wird. Man kann diesen Umstand benutzen, um nachzuweisen,

dass in dem vorher betrachteten Falle die Bewegung wirklich sehr gross wird, so gross, dass Correctionen, welche vorher unbedeutend waren, jetzt von Wichtigkeit werden. Nun verschwindet $\sin \lambda b$, wenn die Kraft isochron mit einer der natürlichen Schwingungen des ersten Theiles der Saite ist, welche in 0 und b befestigt gedacht wird.

Wird eine Gabel auf die Saite eines Monochords gesetzt, oder eines andern mit einem Resonanzboden versehenen Instrumentes, so ist es leicht, durch Versuch die Stellen der grössten Resonanz zu finden. Eine sehr kleine Verschiebung nach einer der beiden Seiten zieht eine beträchtliche Abnahme in dem Umfange des Schalles nach sich. Die so bestimmten Punkte theilen die Saite in eine Anzahl von gleichen Theilen von solcher Länge, dass der natürliche Ton eines jeden derselben (wenn dieser Theil an beiden Enden befestigt wird) derselbe ist, wie der Ton der Gabel. Man kann sich leicht hiervon überzeugen. Die wichtigen Anwendungen, welche Helmholtz von der Resonanz gemacht hat, um einen einzelnen Ton von seiner ihm fremden Begleitung zu reinigen, werden später unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen.

134. Kehren wir nun zu dem allgemeinen Falle zurück, wo λ complex ist; wir haben noch die reellen Theile von (5), (6), (8) des §. 133 herauszuziehen. Zu diesem Zwecke müssen die Sinusse, welche als Factoren auftreten, auf die Form $Re^{i\epsilon}$ reducirt werden Setzen wir also:

$$\sin \lambda x = R_x e^{i\epsilon x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

und nehmen eine gleiche Bezeichnung für die anderen Sinusse. Aus (5) §. 133 erhalten wir demnach entsprechend der obligatorischen Bewegung $y = \cos pt$ in b:

$$y = \gamma \frac{R_x}{R_b} \cos(pt + \epsilon_x - \epsilon_b) \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

von $x = 0$ bis $x = b$,

und aus (6) §. 133:

$$y = \gamma \frac{R_{l-x}}{R_{l-b}} \cos(pt + \epsilon_{l-x} - \epsilon_{l-b}),$$

von $x = b$ bis $x = l$,

Durch einen ähnlichen Process werden wir aus (8) §. 133, wenn:

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ist, erhalten:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{F}{T_1}\frac{R_x . R_{l-b}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} . R_l}\cos\left(pt + \varepsilon_x + \varepsilon_{l-b} - \varepsilon_l - tang^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad \text{von } x = 0 \text{ bis } x = b \\ y &= \frac{F}{T_1}\frac{R_{l-x} . R_b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} . R_l}\cos\left(pt + \varepsilon_{l-x} + \varepsilon_b - \varepsilon_l - tang^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad \text{von } x = b \text{ bis } x = l \end{aligned}\right\} (4)$$

entsprechend der in b angreifenden äussern Kraft $F cos pt$. Es bleibt noch übrig, die Formen von R_x, ε_x, etc. zu erhalten.

Die Werthe von α und β sind bestimmt durch:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{p^2}{a^2},\ 2\alpha\beta = -\frac{p\varkappa}{a^2} \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

weiter ist:

$$\begin{aligned} \sin\lambda x &= \sin\alpha x \cos i\beta x + \cos\alpha x \sin i\beta x \\ &= \sin\alpha x\,\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{2} + i\cos\alpha x\,\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{2}, \end{aligned}$$

so dass:

$$R_x^2 = \sin^2\alpha x\left(\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha x\left(\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{2}\right)^2 \ . \ (6),$$

und:

$$tang\,\varepsilon_x = \frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}\cot\alpha x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

während

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{a}\sqrt[4]{p^4+p^2\varkappa^2} \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Dies vervollständigt die Lösung.

Wenn die Reibung sehr klein ist, dann können die Ausdrücke vereinfacht werden. Z. B. ist in diesem Falle bis zu einer hinreichenden Annäherung:

$$\alpha = \frac{p}{a},\ \beta = -\frac{\varkappa}{2a},\ \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{p}{a},$$

$$\frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{2} = 1,\ \frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{2} = -\frac{\varkappa x}{2a},$$

so dass, entsprechend der obligatorischen Bewegung in b, — $y = \gamma \cos pt$ —, die Amplitude der Bewegung zwischen $x = 0$ und $x = b$ annähernd ist:

$$\gamma \left\{ \frac{\sin^2 \frac{px}{a} + \frac{\varkappa^2 x^2}{4a^2} \cos^2 \frac{px}{a}}{\sin^2 \frac{pb}{a} + \frac{\varkappa^2 b^2}{4a^2} \cos^2 \frac{pb}{a}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{. . . . . (9),}$$

welche gross, aber nicht unendlich wird, wenn $\sin \frac{pb}{a} = 0$ oder der Angriffspunkt ein Knotenpunkt ist.

Wenn die einwirkende Kraft oder die auferlegte Bewegung nicht durch einen einzigen harmonischen Ausdruck ausgedrückt ist, so muss dieselbe erst in solche aufgelöst werden. Die vorstehende Lösung kann dann auf jede Componente einzeln angewandt und die Resultate zusammenaddirt werden. Die Ausdehnung auf den Fall von mehr wie einem Angriffspunkte der äussern Kraft ist ebenfalls klar. Um die allgemeinste den auferlegten Bedingungen genügende Lösung zu erhalten, muss der Ausdruck für die natürlichen Schwingungen ebenfalls hinzu addirt werden; derselbe wird aber allmälig ganz unbedeutend, nachdem die Bewegung eine hinreichende Zeit lang angedauert hat.

Das in den vorhergehenden Untersuchungen angenommene Reibungsgesetz ist das einzige, dessen Resultate man in leichter Weise verfolgen kann; es reicht auch aus, um eine allgemeine Idee von den Wirkungen dissipativer Kräfte auf die Bewegung einer Saite zu geben. Indessen besitzen die aus demselben gezogenen Resultate in anderer Hinsicht eine fictive Einfachheit, welche auf der Thatsache beruht, dass F — die Reibungsfunction — der Form nach ähnlich wie T aussieht, wodurch die Normalcoordinaten unabhängig von einander werden. In beinahe jedem andern Falle (z. B. wenn nur ein einzelner Punkt der Saite durch Reibung verzögert wird) sind keine eigentlichen Normalcoordinaten vorhanden. Es existiren allerdings elementare Schwingungstypen, in welche die Bewegung aufgelöst werden kann und welche vollkommen unabhängig von einander

sind; aber es unterscheiden sich diese in ihrem Charakter wesentlich von denen, mit welchen wir bis jetzt zu thun hatten, da die verschiedenen Theile des Systems (wenn dasselbe in einer elementaren Schwingung begriffen ist) sich nicht gleichzeitig in derselben Phase befinden. Specielle Fälle ausgenommen kann dann keine lineare Transformation der Coordinaten (mit reellen Coefficienten) T, F und V zu gleicher Zeit auf eine Summe von Quadraten reduciren.

Setzen wir voraus, dass die Saite keine Trägheit besitzt, so dass $T = 0$ ist, dann können F und V auf Summen von Quadraten reducirt werden. Dieses Problem hat für die Akustik keine Wichtigkeit; es ist aber deshalb von Interesse, weil es mathematisch dem der Wärmeleitung und Strahlung in einem Stabe, dessen Enden auf einer constanten Temperatur gehalten werden, analog ist.

135. So weit haben wir angenommen, dass die Saite in zwei festen Punkten $x = 0$ und $x = l$ in Ruhe gehalten wird. Da eine absolute Festigkeit in Praxis nicht erreicht werden kann, ist es nicht ohne Interesse, zu untersuchen, in welcher Weise die Schwingungen einer Saite modificirt werden müssen, wenn die Befestigungspunkte nachgeben können; dieses Problem wird auch Gelegenheit zu einer oder zwei wichtigen Bemerkungen geben. Der Einfachheit halber werden wir voraussetzen, dass das System mit Bezug auf den Mittelpunkt der Saite symmetrisch ist und dass jedes Ende an einer Masse (die ohne Ausdehnung im Raume angenommen wird) befestigt und durch eine Feder μ gegen die Gleichgewichtslage gepresst wird. Wirken keine Reibungskräfte, so lässt sich die Bewegung nothwendiger Weise in Normalschwingungen auflösen. Nehmen wir an:

$$y = \{\alpha \sin mx + \beta \cos mx\} \cos(mat - \varepsilon) \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Bedingungen für die Enden sind:

$$\left.\begin{aligned} \text{wenn } x = 0,\ M\ddot{y} + \mu y &= T_1 \frac{dy}{dx} \\ \text{wenn } x = l,\ M\ddot{y} + \mu y &= -T_1 \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

woraus:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta \, tang\, ml - \alpha}{\alpha \, tang\, ml + \beta} = \frac{\mu - Ma^2 m^2}{m T_1} \quad \ldots \quad (3),$$

zwei Gleichungen, die hinreichen, um m und das Verhältniss von β zu α zu bestimmen. Eliminiren wir das letztere Verhältniss, so finden wir:

$$tang\, ml = \frac{2\nu}{1 - \nu^2} \quad \ldots \quad (4),$$

wenn wir zur Abkürzung ν schreiben für:

$$\frac{\mu - Ma^2 m^2}{m T_1}.$$

Gleichung (3) hat unendlich viele Wurzeln, welche man erhalten kann, wenn man für ν schreibt $tang\, \vartheta$, so dass $tang\, ml = tang\, 2\vartheta$; das Resultat der Summation aller entsprechenden particulären Lösungen, jede mit ihren beiden willkürlichen Constanten α und ε, ist nothwendiger Weise die allgemeinste Lösung, deren das Problem fähig ist, und ist daher im Stande, die Bewegung darzustellen, welche von einer beliebigen Anfangsvertheilung der Verschiebung und Geschwindigkeit herrührt. Wir schliessen daraus, dass jede Function von x zwischen $x = 0$ und $x = l$ entwickelt werden kann in eine Reihe von Ausdrücken, deren Gestalt ist:

$$\varphi_1(\nu_1 \sin m_1 x + \cos m_1 x) + \varphi_2(\nu_2 \sin m_2 x + \cos m_2 x) + \ldots \quad (5),$$

wo m_1, m_2, etc. die Wurzeln von (3) und ν_1, ν_2, etc. die entsprechenden Werthe von ν sind. Die Grössen φ_1, φ_2, etc. sind die Normalcoordinaten des Systems.

Aus der Symmetrie des Systems folgt, dass bei jeder Normalschwingung der Werth von y an Punkten, die gleich weit von der Mitte der Saite abstehen, derselbe ist, z. B. an den beiden Enden, wo $x = 0$ und $x = l$. Daher ist $\nu_s \sin m_s l + \cos m_s l = \pm 1$, wie ebenfalls aus (4) bewiesen werden kann.

Die kinetische Energie T der ganzen Bewegung setzt sich zusammen aus der Energie der Saite und der der Massen M. Daher ist:

$$T = \frac{1}{2}\,\varrho\int_0^l \{\Sigma\,\dot{\varphi}\,(\nu \sin mx + \cos mx)\}^2\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\,M\{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 \cdots\}^2 + \frac{1}{2}\,M\{\dot{\varphi}_1\,(\nu_1 \sin m_1 l + \cos m_1 l) + \cdots\}^2.$$

Wegen der charakteristischen Eigenschaft der Normalcoordinaten können aber Glieder, welche die Producte derselben enthalten, in Wirklichkeit in dem Ausdrucke für T nicht vorhanden sein, so dass:

$$\varrho\int_0^l (\nu_r \sin m_r x + \cos m_r x)\,(\nu_s \sin m_s x + \cos m_s x)\,dx$$

$$+ M + M(\nu_r \sin m_r l + \cos m_r l)\,(\nu_s \sin m_s l + \cos m_s l) = 0 \;.\;.\;.\; (6),$$

wenn r und s verschieden sind.

Dieses Theorem lehrt, wie die willkürlichen Constanten zu bestimmen sind, damit die Reihe (5) eine willkürliche Function darstellen kann. Wir nehmen den Ausdruck:

$$\varrho\int_0^l y\,(\nu_s \sin m_s x + \cos m_s x)\,dx$$

$$+ My_0 + My_l\,(\nu_s \sin m_s l x + \cos m_s l) \;.\;.\;.\;.\; (7),$$

und setzen in denselben für y die Reihe (5) ein. Das Resultat ist eine Reihe von Gliedern folgender Art:

$$\varrho\int_0^l \varphi_r\,(\nu_r \sin m_r x + \cos m_r x)\,(\nu_s \sin m_s x + \cos m_s x)\,dx$$

$$+ M\varphi_r + M\varphi_r\,(\nu_r \sin m_r l + \cos m_r l)\,(\nu_s \sin m_s l + \cos m_s l),$$

von denen sämmtliche verschwinden, mit Ausnahme des einen, für welches $r = s$. Daher ist φ_s gleich dem Ausdruck (7), dividirt durch:

$$\varrho\int_0^l (\nu_s \sin m_s x + \cos m_s x)^2\,dx$$

$$+ M + M\,(\nu_s \sin m_s l + \cos m_s l)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; (8);$$

somit sind also die Coefficienten der Reihe bestimmt. Ist $M = 0$, so ist, selbst wenn auch μ endlich ist, der Vorgang

natürlich viel einfacher, indessen ist das uneingeschränkte Problem lehrreicher. Es wird oft ein so grosser Nachdruck auf specielle Beweise der Reihe von Fourier und Laplace gelegt, dass der Leser geneigt wird, eine zu beschränkte Anschauung von der Natur dieser wichtigen Resultate der Analysis zu erhalten.

Wir werden jetzt zeigen, wie Fourier's Theorem in seiner allgemeinen Form von unserer gegenwärtigen Untersuchung abgeleitet werden kann. Es sei $M = 0$; wenn dann $\mu = \infty$ ist, so sind die Enden der Saite fest und die Bestimmungsgleichung für m wird $tang\, m l = 0$, oder $ml = s\pi$, wie es ja nach unseren früheren Kenntnissen sein muss. In diesem Falle wird die Reihe für y:

$$y = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots (9),$$

welche hinreichend allgemein sein muss, um jede beliebige Function von x, welche bei 0 und l verschwindet, zwischen diesen Grenzen darzustellen. Nun wollen wir aber voraussetzen, dass μ gleich Null ist, während M noch gleich Null bleibt. Wir können annehmen, dass dann die Enden der Saite im Stande sind, über zwei weiche Lager senkrecht zur Saitenlänge zu gleiten, die Endbedingung ist das Verschwinden von $\frac{dy}{dx}$. Die Gleichung für m ist dieselbe wie vorher; wir lernen also, dass jede Function y', für welche das Verhältniss ihrer Variationen bei $x = 0$ und $x = l$ verschwindet, in folgende Reihe entwickelt werden kann:

$$y' = B_1 \cos \frac{\pi x}{l} + B_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + B_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \ldots (10).$$

Diese Reihe ändert sich nicht, wenn das Zeichen von x geändert wird; die erste Reihe ändert dabei bloss ihr Zeichen, ohne dass ihr numerischer Werth eine Aenderung erfährt. Wenn daher y' eine gerade Function von x ist, so stellt (10) dieselbe von $- l$ bis $+ l$ dar. Auf dieselbe Weise stellt (9), wenn y eine ungerade Function von x ist, dieselbe zwischen denselben Grenzen dar.

Nun kann, was für eine Function von x, $\varphi(x)$ auch sein mag, dieselbe immer in zwei Theile getheilt werden, von denen der eine gerade und der andere ungerade ist; so ist:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2};$$

so dass $\varphi(x)$, wenn es der Art gebaut ist, dass $\varphi(-l) = \varphi(+l)$ und $\varphi'(-l) = \varphi'(+l)$, zwischen den Grenzen $\pm l$ dargestellt werden kann durch die gemischte Reihe: .

$$A_1 \sin\frac{\pi x}{l} + B_1 \cos\frac{\pi x}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + B_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots \quad (11).$$

Diese Reihe ist periodisch mit der Periode $2l$. Wenn daher $\varphi(x)$ dieselbe Eigenschaft besitzt, so ist, gleichgültig, welches ihr Charakter in anderer Hinsicht sein mag, die Reihe das vollständige Aequivalent dieser Function. Das ist Fourier's Theorem[1]).

Wir werden nun weiter dazu übergehen, die Wirkungen eines geringen Nachgebens der Unterstützungsstellen zu untersuchen in dem Falle, wo die Enden einer Saite annähernd fest sind. Die Grösse v mag gross sein, entweder durch μ oder durch M. Wir wollen uns auf die zwei hauptsächlichsten Fälle beschränken, 1) wo μ gross ist und M verschwindet, 2) wo μ verschwindet und M gross ist.

In dem ersten Falle ist:

$$v = \frac{\mu}{T_1 m},$$

und die Gleichung für m ist annähernd:

$$\tang ml = -\frac{2}{v} = -\frac{2T_1 m}{\mu}.$$

Nehmen wir an: $ml = s\pi + x$, wo x klein ist; dann ist angenähert:

$$x = \tang x = -\frac{2T_1 \cdot s\pi}{\mu l}$$

---

1) Das beste „System" zum Beweise von Fourier's Theorem aus dynamischen Betrachtungen ist eine um einen glatten Cylinder (§. 139) gewundene Kette ohne Ende oder eine dünne in sich zurückkehrende Luftsäule, die in einer ringförmigen Röhre eingeschlossen ist.

und:

$$ml = s\pi\left(1 - \frac{2\,T_1}{\mu l}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Bis zu diesem Grade von Annäherung hören die Töne nicht auf eine harmonische Scala zu bilden, indessen ist die Höhe des Ganzen um ein Geringes erniedrigt. Die Wirkung des Nachgebens ist thatsächlich dieselbe, wie die einer Verlängerung der Saite in dem Verhältniss $1 : 1 + \frac{2\,T_1}{\mu l}$, wie wir auch hätten voraussehen können.

Das Resultat ist ein anderes, wenn μ verschwindet, während M gross ist. Dann ist:

$$v = -\frac{Ma^2 m}{T_1},$$

und:

$$tang\, m l = \frac{2\,T_1}{Ma^2 m} \text{ angenähert.}$$

Daher:

$$m l = s\,\pi + \frac{2\,T_1 l}{Ma^2 . s\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Die Wirkung ist daher äquivalent einer Verkürzung von l in dem Verhältniss:

$$1 : 1 - \frac{2\,T_1 l}{M a^2 \cdot s^2 \pi^2};$$

in Folge hiervon tritt eine Erhöhung des Tones ein, wobei die Erhöhung um so grösser ausfällt, je niedriger die Toncomponente ist. Man könnte sich denken, dass jede Art von Nachgeben die Tonhöhe der Saite erniedrigen würde, indess zeigt die vorstehende Untersuchung, dass dies nicht der Fall ist. Ob der Ton erhöht oder erniedrigt wird, hängt von dem Zeichen von v ab, und dies hängt wieder davon ab, ob der natürliche Ton der von der Feder μ bewegten Masse tiefer oder höher wie der der in Frage stehenden Schwingungscomponente ist.

136. Das Problem einer in anderer Weise gleichfömigen Saite, welche ein endliches Gewicht M in $x = b$ trägt,

kann durch die in §. 133 aufgefundene Formel gelöst werden. Denn wenn die Kraft $F \cos pt$ von der Reaction gegen die Beschleunigung der Masse M herrührt, so ist:

$$F = \gamma p^2 M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

welches in Verbindung mit Gleichung (7) des §. 133 Folgendes zur Bestimmung der möglichen Werthe von λ (oder $p:a$) giebt:

$$a^2 M \lambda \sin \lambda b \sin \lambda (l - b) = T_1 \sin \lambda l \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Der Werth von y für jede λ entsprechende Normalschwingung ist:

$$\left.\begin{array}{l} y = P \sin \lambda x \sin \lambda (l - b) \cos (a \lambda t - \varepsilon) \\ \qquad \text{von } x = 0 \text{ bis } x = b \\ y = P \sin \lambda (l - x) \sin \lambda b \cos (a \lambda t - \varepsilon) \\ \qquad \text{von } x = b \text{ bis } x = l \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (3),$$

worin P und ε willkürliche Constanten sind.

Es bedarf keiner Rechnung, um nachzuweisen, dass jede Normalcomponente, welche in dem Punkt, wo das Gewicht angebracht ist, einen Knotenpunkt hat, von der Gegenwart dieses Gewichtes nicht beeinflusst wird. Wenn z. B. eine Saite in ihrem Mittelpunkt beschwert wird, dann bleiben ihre Schwingungscomponenten von gerader Ordnung ungeändert, während alle ungeraden Componenten in ihrer Tonhöhe erniedrigt werden. Man kann manchmal von dieser Wirkung eines angehängten Gewichtes Vortheil ziehen, wenn es zu irgend einem Zwecke erwünscht ist, die harmonische Beziehung der Toncomponenten zu stören.

Ist M sehr gross, so wird die tiefste Componente in Betreff ihrer Höhe von allen anderen durch einen weiten Zwischenraum getrennt. Wir wollen den Fall nehmen, wo das Gewicht im Mittelpunkt angehängt ist, so dass $b = l - b = \frac{1}{2} l$. Die Gleichung für λ wird dann:

$$\sin \frac{\lambda l}{2} \cdot \left\{ \frac{\lambda l}{2} \tang \frac{\lambda l}{2} - \frac{\varrho l}{M} \right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin $\varrho l : M$, welches das Verhältniss der Massen der Saite und des Gewichtes angiebt, eine kleine Grösse ist, die α^2

genannt werden mag. Die erste Wurzel, welche zu dem niedrigsten Ton gehört, erhält man, wenn $\frac{1}{2}\lambda l$ sehr klein und der Art ist, dass nahezu:

$$\left(\frac{1}{2}\lambda l\right)^2 \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\lambda l\right)^2\right\} = \alpha^2,$$

woraus:

$$\frac{1}{2}\lambda l = \alpha\left(1 - \frac{1}{6}\alpha^2\right);$$

die Periodendauer ist gegeben durch:

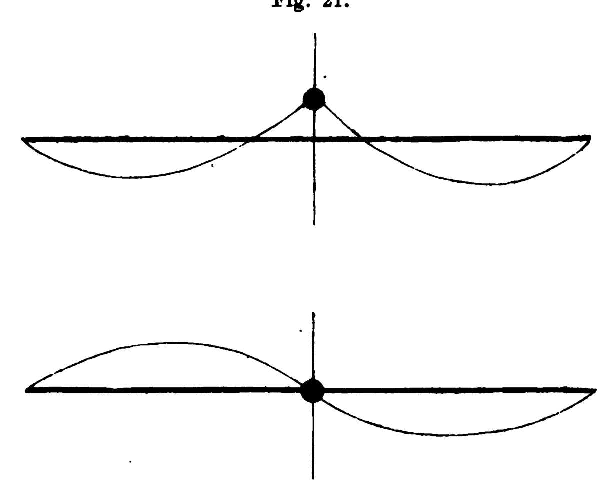
$$\tau = \pi\sqrt{\frac{Ml}{T_1}}\left(1 + \frac{\varrho l}{6M}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (5).$$

Das zweite Glied giebt eine Correction an zu dem ersten rohen Werth, der in einem frühern Capitel (§. 52) erhalten wurde, wenn die Trägheit der Saite ganz vernachlässigt ward. Dass dieses Correctionsglied additiv sein würde, konnte man erwarten. In der That kann die Formel, wie sie oben steht, dadurch erhalten werden, dass man bei der wirklichen Schwingung die beiden Theile der Saite als nahezu gerade ansieht. Dieselbe Näherung, wie die Formel, genügt auch, wenn man bei Berechnung der potentiellen und kinetischen Energie die letztgenannte Voraussetzung macht. Denn dann vergrössert die Berücksichtigung der Trägheit der Saite die kinetische Energie, welche einer bestimmten Geschwindigkeit des aufgelegten Gewichtes entspricht, in dem Verhältniss von $M : M + \frac{1}{3}\varrho l$, und das führt zu dem obigen Resultat. Diese Methode bietet in der That in einer Hinsicht auch Vortheile dar, da sie auch angewendet werden kann, wenn ϱ nicht gleichförmig ist. Alles, was erfordert wird, ist das, dass das Gewicht M hinreichend überwiegt.

Es giebt keine andere Wurzel der Gleichung (4) ausser $\sin\frac{1}{2}\lambda l = 0$, welche die zweite Componente der Saite giebt, nämlich eine Schwingung, die unabhängig von der Belastung

ist. Die auf das erste Paar folgenden Wurzeln folgen einander in Paaren, deren einzelne Glieder in der Grösse wenig von

Fig. 21.



einander verschieden sind; denn der eine Satz von Wurzeln wird durch $\frac{1}{2}\lambda l = s\pi$ gegeben und der andere angenähert durch $\frac{1}{2}\lambda l = s\pi + \frac{\varrho l}{s\pi M}$, worin das zweite Glied klein ist. Die zwei Schwingungsarten für $s = 1$ sind in der nebenstehenden Figur 21 dargestellt.

Die allgemeine Formel (2) kann auch dazu benutzt werden, die Wirkung eines kleinen Gewichtes auf die verschiedenen Componenten aufzusuchen.

137. Wirkliche Saiten und Drähte sind nicht vollkommen biegsam. Dieselben setzen der Biegung einen gewissen Widerstand entgegen, der aber in zwei, verschiedene Wirkungen hervorbringende Theile getrennt werden kann. Der erste dieser Theile wird Viskosität genannt und offenbart sich in der Dämpfung der Schwingungen. Dieser Theil hat keinen merklichen Einfluss auf die Perioden. Der zweite ist seiner

Natur nach conservativ und verändert die potentielle Energie des Systems mit der Wirkung, die Periode zu verkürzen. Eine vollständige Untersuchung dieses Theiles ist hier nicht am Platz, indess lässt der Fall, welcher bei der Anwendung auf musikalische Instrumente das meiste Interesse verlangt, eine hinreichend einfache Behandlung zu.

Wenn die Starrheit der Saiten mit in Rechnung gezogen wird, so muss in Betreff der Endbedingungen etwas mehr angegeben werden, als dass y verschwindet. Zwei Fälle mögen besonders hervorgehoben werden:

1) Die Enden sind festgeklemmt, so dass an beiden Enden $\frac{dy}{dx} = 0$.

2) Die Bewegungsrichtungen der Enden sind vollkommen frei, dann ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Wir wollen jetzt den letzten Fall durchnehmen.

Wenn keine Starrheit vorhanden wäre, so würde die Schwingungsart sein:

$$y \propto \sin \frac{s\pi x}{l},$$

wodurch die zweite Bedingung erfüllt wird.

Die Einwirkung der Starrheit kann eine solche sein, dass dadurch die Art der Schwingung etwas geändert wird. Ob aber ein solches Resultat eintritt oder nicht, immer muss die unter der Annahme, dass die Schwingungsart ungeändert bleibt, aus der potentiellen und kinetischen Energie berechnete Periode bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung richtig sein (§. 88).

Die von der Steifigkeit herrührende potentielle Energie wird ausgedrückt durch:

$$\delta V = \frac{1}{2}\varkappa \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

worin $\varkappa$ eine Grösse ist, welche von der Natur des Materials und von der Form des Querschnitts abhängt und zwar auf

eine Weise, zu deren näheren Untersuchung wir noch nicht hinreichend vorbereitet sind. Die Form von δV ist evident, weil die zur Biegung eines jeden Elementes ds nothwendige Kraft proportional zunächst mit ds selbst, und dann mit dem Betrage der schon vorhandenen Biegung ist, das ist mit $ds : \varrho$. Die ganze Arbeit, welche geleistet werden muss, um in ds eine Krümmung von $1 : \varrho$ hervorzurufen, ist daher proportional mit $ds : \varrho^2$; bei der Annäherung, mit welcher wir uns begnügen, ist nun aber $ds = dx$, und $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$.

Wenn also $y = \varphi \sin \frac{s \pi x}{l}$, so ist:

$$T = \frac{1}{4} \varrho l \dot{\varphi}^2; \quad V = \frac{1}{4} T_1 l . \frac{s^2 \pi^2}{l^2} \varphi^2 \left(1 + \frac{\varkappa}{T_1} \frac{s^2 \pi^2}{l^2}\right).$$

Die Periode von φ wird dann sein:

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{\varkappa}{2 T_1} \cdot \frac{s^2 \pi^2}{l^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wenn τ_0 den Werth der Periode bezeichnet, welchen die Saite bei vollkommener Biegsamkeit haben würde. Es ergiebt sich aus der Formel, dass der Einfluss der Steifigkeit rapide mit der Ordnung der Schwingungscomponenten wächst, welche dann aufhören, einer harmonischen Scala anzugehören. Indessen ist bei den in der ausübenden Musik gebrauchten Saiten die Spannung gewöhnlich hinreichend, um den Einfluss der Starrheit ganz unbedeutend zu machen.

Die eben benutzte Methode kann nur mit einer gewissen Modification auf den andern Fall in Betreff der Endbedingungen angewandt werden, den Fall nämlich, wo die Enden des Stabes festgeklemmt sind. In der unmittelbaren Nähe der Enden muss die Schwingungsart sich von der, welche eine vollkommen biegsame Saite annehmen würde, um eine Grösse unterscheiden, welche nicht mehr klein ist und deren Quadrat daher nicht mehr vernachlässigt werden darf. Wir werden auf diesen Fall bei der Behandlung der transversalen Schwingungen von Stäben zurückkommen.

138. Wir haben bisher ein Problem in Betreff der Schwingungen von Saiten noch nicht berücksichtigt, welches ein gewisses praktisches Interesse darbietet. Es ist dieses der Charakter der Bewegung einer Violin- (oder Violincello-) Saite, unter der Einwirkung des Bogens. Bei diesem Problem kennt man den modus operandi des Bogens nicht hinreichend genau genug, um ausschliesslich die a prioristische Methode zu befolgen: die Fingerzeige der Theorie müssen durch specielle Beobachtungen ergänzt werden. Durch eine geschickte Combination von aus beiden Quellen geschöpften Beweismitteln ist es Helmholtz gelungen, die Hauptzüge dieses Falles zu bestimmen, indessen sind noch einige der Details dunkel.

Da der Klang eines guten, und dabei gut gespielten Instrumentes musikalisch ist, so schliessen wir hieraus, dass die Schwingungen genau periodisch sind oder wenigstens, dass eine ganz genaue Periodicität der ideale Fall bei den Violinen ist. Ueberdies hat — und das ist ein sehr wichtiger Punkt — der von dem Bogen hervorgebrachte Klang nahezu oder auch genau dieselbe Höhe, wie der der Saite natürliche Klang. Die Schwingungen sind daher, wenn sie auch erzwungen werden, in gewissem Sinne als freie anzusehen. Die Aufrechterhaltung der Bewegung ist ganz von der von dem Bogen herrührenden Energie abhängig; und doch bestimmt der Bogen nicht ihre Periode, ändert sie selbst auch nicht. Wir werden an den selbstthätigen elektrischen Unterbrecher erinnert, dessen Bewegung im technischen Sinne wirklich erzwungen ist, aber doch die Art von Freiheit besitzt, welche darin besteht, dass er (ganz oder theilweise) zu bestimmen im Stande ist, unter welche Einflüsse er kommen soll.

Aus der Thatsache, dass die Saite in ihren natürlichen Perioden schwingt, folgt aber nicht sofort, dass sie auch in ihren natürlichen Schwingungsarten sich bewegt. Wenn die Coefficienten der Reihenentwickelung von Fourier:

$$y = \varphi_1 \sin \frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots$$

als unabhängige Coordinaten genommen werden, durch welche die Configuration des Systems in jedem Momente bestimmt

wird, so wissen wir, dass, wenn keine Reibung, oder nur eine solche Reibung, für welche $F \propto T$, vorhanden ist, die natürlichen Schwingungen dadurch ausgedrückt werden, dass man jede Coordinate als einfach harmonische (oder quasi-harmonische) Function der Zeit nimmt. Dagegen kann, ohne im Widerspruch mit irgend etwas von dem früher Gesagten zu stehen, jede Coordinate in dem gegenwärtigen Fall irgend welche Function der Zeit sein, welche nur in der Zeit τ periodisch ist. Eine leichte Untersuchung wird uns aber beweisen, dass die Schwingungen ebensowohl in ihrer Art wie in ihrer Periode wirklich dieselben, wie die natürlichen sein müssen.

Die durch den Bogen in seinem Angriffspunkt ausgeübte Kraft kann durch:

$$Y = \Sigma A_r \cos\left(\frac{2r\pi t}{\tau} - \varepsilon_r\right)$$

ausgedrückt werden, so dass die Bewegungsgleichung für die Coordinate φ_s lautet:

$$\ddot{\varphi}_s + \varkappa\dot{\varphi}_s + \frac{s^2\pi^2a^2}{l^2}\varphi_s = \frac{2}{l\varrho}\sin\frac{s\pi b}{l}\cdot\Sigma A_r \cos\left(\frac{2r\pi t}{\tau} - \varepsilon_r\right),$$

b ist hierbei der Angriffspunkt des Bogens. Eine jede der Theilcomponenten von Φ_s giebt in der Lösung ein entsprechendes Glied mit ihrer eigenen Periode; die eine Componente aber, deren Periode dieselbe wie die natürliche Periode von φ_s ist, hat relativ zu den anderen eine ausserordentlich überwiegende Bedeutung. Praktisch brauchen wir also, wenn die Dämpfung klein ist, nur den Theil von φ_s weiter zu berücksichtigen, welcher von $A_s \cos\left(\frac{2s\pi t}{\tau} - \varepsilon_s\right)$ abhängt, das heisst, wir können die Schwingungen als natürliche auch in Bezug auf ihre Art ansehen.

Eine andere wesentliche Thatsache, welche durch Beweismittel, die sowohl der Theorie als der Beobachtung mit dem Ohr entstammen, erhalten wird, ist folgende. Alle Schwingungscomponenten sind nicht vorhanden, welche in dem Erregungspunkt einen Knotenpunkt besitzen. „Um jedoch diese Töne auszulöschen, ist es nöthig, dass die Coincidenz zwischen Angriffspunkt des Bogens und dem Knotenpunkt sehr genau

ist. Eine sehr kleine Abweichung stellt die Töne, welche ausfallen sollen, in einer beträchtlichen Stärke wieder her [1]).“

Die übrigen Beweisgründe, auf welchen Helmholtz's Theorie beruht, wurden aus directen Beobachtungen mit dem Vibrationsmikroskop erhalten. Wie in Capitel II auseinandergesetzt wurde, giebt dieses Instument einen Anblick der Curve, welche die Bewegung des beobachteten Punktes darstellt, wie jene auf der Oberfläche eines transparenten Cylinders aufgetragen erscheinen würde. Um die darstellende Curve in ihrer gewöhnlichen Form abzuleiten, muss man sich den fingirten Cylinder aufgerollt, oder auf einer Ebene abgewickelt denken.

Die einfachsten Resultate werden erhalten, wenn der Bogen in einem Knotenpunkt von einer der höheren Componenten aufgesetzt wird und der beobachtete Punkt einer der anderen Knoten desselben Systems ist. Wird der Bogen gut geführt, so dass der Fundamentalton klar und stark erklingt, so ist die die Schwingung darstellende Curve die in der Fig. 22 gezeichnete; hierin entspricht die Abscisse der Zeit (AB ist eine vollständige Periode), die Ordinaten stellen die Verschiebungen dar. Es ergiebt sich die bemerkenswerthe Thatsache, dass die ganze

Fig. 22.

Periode in zwei Theile τ_0 und $\tau - \tau_0$ getheilt werden kann; während eines jeden dieses Theiles ist die Geschwindigkeit des beobachteten Punktes constant; die Geschwindigkeiten hin und her sind aber im Allgemeinen ungleich.

Wir müssen nun diese Curve durch eine Reihe von harmonischen Ausdrücken darstellen. Entspricht der Anfangspunkt der Zeit dem Punkte A und ist $AD = FC = \gamma$, so giebt der Fourier'sche Satz:

1) Donkin's Acoustics p. 131.

$$y = \frac{2\gamma\tau^2}{\pi^2\tau_0(\tau-\tau_0)} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^2} \sin\frac{s\pi\tau_0}{\tau} \sin\frac{2s\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right) \ldots (1).$$

Mit Rücksicht auf den Werth von τ_0 wissen wir, dass alle die Componenten von y verschwinden müssen, für welche $\sin\frac{s\pi x_0}{l} = 0$ ist (x_0 ist der beobachtete Punkt), weil bei den oben angegebenen Zustandsbedingungen der Bogen diese Schwingungscomponenten nicht hervorrufen kann. Es ist daher Grund zu der Annahme, dass $\tau_0 : \tau = x_0 : l$; und in der That bestätigt die Beobachtung, dass das Verhältniss von $AC : CB$ (in der Figur) gleich dem Verhältniss der beiden Theile ist, in welche die Saite durch den Beobachtungspunkt getheilt wird.

Die freien Schwingungen der Saite werden nun im Allgemeinen dargestellt durch:

$$y = \sum_{s=1}^{s=\infty} \sin.\frac{s\pi x}{l}\left\{A_s\cos\frac{2s\pi t}{\tau} + B_s\sin\frac{2s\pi t}{\tau}\right\};$$

und dieser Werth muss im Punkte $x = x_0$ mit (1) übereinstimmen. Um eine bequeme Vergleichung anstellen zu können, schreiben wir:

$$A_s\cos\frac{2s\pi t}{\tau} + B_s\sin\frac{2s\pi t}{\tau} = C_s\cos\frac{2s\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right) + D_s\sin\frac{2s\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right);$$

hieraus ergiebt sich, dass $C_s = 0$.

Wir haben demnach um D_s zu bestimmen:

$$\sin\frac{s\pi x_0}{l}\cdot D_s = \frac{2\gamma\tau^2}{\pi^2\tau_0(\tau-\tau_0)}\cdot\frac{1}{s^2}\sin\frac{s\pi x_0}{l},$$

woraus

$$D_s = \frac{2\gamma\tau^2}{\pi^2\tau_0(\tau-\tau_0)}\cdot\frac{1}{s^2} \ldots\ldots\ldots (2),$$

wenn nicht $\sin\frac{s\pi x_0}{l} = 0$ ist.

In dem letzten Falle lässt die Vergleichung D_s unbestimmt; wir wissen aber aus anderen Gründen, dass dann D_s verschwindet. Augenblicklich wollen wir indessen der Einfachheit halber annehmen, dass D_s immer durch (2) gegeben ist. Fällt der Angriffspunkt des Bogens nicht mit einem

Knotenpunkt von irgend einer der tieferen Toncomponenten des Klanges zusammen, so hat der begangene Fehler keine grossen Folgen.

Nach dem Obigen ist die vollständige Lösung des Problems:

$$y = \frac{2\gamma\tau^2}{\pi^2\tau_0(\tau-\tau_0)} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^2} \sin\frac{s\pi x}{l} \sin\frac{2s\pi}{\tau}\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right) \ldots (3).$$

Die Amplituden der einzelnen Componenten sind daher proportional s^{-2}. Bei einer gezupften Saite fanden wir für die entsprechende Function $s^{-2}\sin\frac{s\pi b}{l}$, welche der obigen in etwas ähnlich ist. Wird die Saite in der Mitte gezupft, so verschwinden die geraden Componenten; die ungeraden folgen dann demselben Gesetz, welches wir für eine Violinsaite erhalten haben. Die Gleichung (3) giebt an, dass die Saite immer die Gestalt von zwei sich unter einem Winkel schneidenden Linien hat. Um dieses noch deutlicher nachzuweisen, wollen wir den Ausgangspunkt für die Zeit und den constanten Factor ändern, so dass:

$$y = \frac{8P}{\pi^2}\sum\frac{1}{s^2}\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{2s\pi t}{\tau} \quad \ldots \quad (4),$$

die Gleichung wird, welche zu jeder Zeit die Gestalt der Saite angiebt.

Nun wissen wir (§. 127), dass die Gleichung eines Paares von Linien, die von den festen Enden der Saite ausgehen und sich in einem Punkte treffen, dessen Coordinaten α und β sind, lautet:

$$y = \frac{2\beta l^2}{\pi^2\alpha(l-\alpha)}\sum\frac{1}{s^2}\sin\frac{s\pi\alpha}{l}\sin\frac{s\pi x}{l}.$$

Daher stellt zur Zeit t Gleichung (4) ein solches Paar von Linien dar, die sich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten gegeben sind durch:

$$\frac{\beta l^2}{\alpha(l-\alpha)} = \pm 4P,$$

$$\sin\frac{s\pi\alpha}{l} = \pm\sin\frac{2s\pi t}{\tau}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass erstens die Projection des Schnittpunktes auf die x Axe sich gleichförmig hin und zurück bewegt zwischen $x = 0$ und $x = l$, und dass ferner der Schnittpunkt selber auf dem einen oder dem andern von zwei parabolischen Bögen liegt, zu denen die Gleichgewichtslage der Saite eine gemeinsame Sehne ist.

Da die durch die Bewegung des Schnittpunktes ihrer zwei geraden Theile definirte Bewegung der Saite in keiner speciellen Relation zu x_0 (dem Beobachtungspunkt) steht, so folgt, dass nach den obigen Gleichungen dieselbe Art von Bewegung in jedem andern Punkt hätte beobachtet werden können. Und dies ist auch annähernd richtig. Es wurde aber, wie man sich erinnern wird, das theoretische Resultat nur erhalten durch die Annahme, dass Schwingungscomponenten mit Knotenpunkten in x_0 in gewissen Verhältnissen vorhanden sind, obschon thatsächlich die Abwesenheit derselben aus mechanischen Gründen erforderlich ist. Die Gegenwart oder Abwesenheit dieser Componenten ist gleichgültig, wenn der Beobachtungspunkt ein Knotenpunkt ist, aber nicht in jedem andern Fall. Ist der Beobachtungspunkt etwas von einem Knotenpunkt entfernt, so zeigt die Schwingungscurve eine Reihe von Rippen, welche von der Abwesenheit der fraglichen Componenten herrühren. Weitere Details findet man bei Helmholtz und Donkin.

Die die Schwingung unterhaltende Kraft des Bogens beruht auf der Thatsache, dass die Reibung fester Körper bei mässiger Geschwindigkeit geringer ist, wie bei kleiner Geschwindigkeit, so dass, wenn der vom Bogen ergriffene Theil der Saite sich mit jenem bewegt (nicht unwahrscheinlich mit derselben Geschwindigkeit), die gegenseitige Einwirkung grösser ist als in dem Falle, wo sich die Saite in der entgegengesetzten Richtung mit einer relativ grösseren Geschwindigkeit bewegt. Die beschleunigende Einwirkung des Bogens während des ersten Theiles der Bewegung wird daher nicht ganz neutralisirt durch die folgende Verzögerung und es bleibt ein Ueberschuss von Beschleunigung, welcher die Schwingungen ungeachtet anderer Verluste an Energie aufrecht erhalten kann. Eine merkwürdige Wirkung derselben Eigenthümlichkeit der Reibung fester Körper

wurde von Mr. Froude beobachtet. Derselbe fand, dass die Schwingungen eines Pendels, welches an einem Stabe schwingt, dadurch aufrecht erhalten oder selbst vergrössert werden können, dass man den Stab zum Rotiren bringt.

139. Eine auf einer leicht gekrümmten Fläche ausgespannte Saite liegt im Gleichgewicht längs einer geodätischen Linie und schwingt, wenn sie bestimmten Stabilitätsbedingungen unterliegt, um diese Lage, nachdem sie einmal aus derselben herausgebracht. Der einfachste Fall, den man sich denken kann, ist der, wo die Oberfläche eine Cylinderfläche von irgend welcher Form ist, und wo dann die Gleichgewichtslage der Saite senkrecht zu den erzeugenden Linien steht. Der Leser wird sich leicht davon überzeugen, dass die Bewegung unabhängig von der Krümmung des Cylinders ist, und dass die Schwingungen in allen wesentlichen Stücken dieselben sind, als wenn die Oberfläche in eine Ebene abgewickelt wäre. Erwähnenswerth ist der Fall einer Saite ohne Ende, welche ein Band rund um den Cylinder bildet.

Um die charakteristischen Züge dieser Classe von Problemen zu zeigen, wollen wir das verhältnissmässig einfache Beispiel einer Saite nehmen, die auf der Oberfläche einer glatten Kugel ausgespannt ist und im Gleichgewicht längs eines grössten Kreises liegt. Die zweckmässigsten Coordinaten für unser System sind in diesem Falle die Breite θ, welche von dem grössten Kreise als Aequator an gemessen wird und die Länge φ, die wir längs des grössten Kreises messen. Ist der Radius der Kugel a, so haben wir:

$$T = \frac{1}{2}\int \varrho (a\dot{\vartheta})^2 a\, d\varphi = \frac{a^3\varrho}{2}\int \dot{\vartheta}^2 d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Verlängerung der Saite wird gegeben durch:

$$\int (ds - a\, d\varphi) = a\int \left(\frac{ds}{a\, d\varphi} - 1\right) d\varphi.$$

Nun ist:

$$ds^2 = (a\, d\vartheta)^2 + (a \cos\vartheta\, d\varphi)^2;$$

so dass:

$$\frac{ds}{a\,d\varphi} - 1 = \left\{\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 + \cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 - \frac{\vartheta^2}{2}$$

angenähert.

Demnach haben wir:

$$V = \frac{1}{2}\,a\,T_1 \int \left\{\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 - \vartheta^2\right\} d\varphi \quad . \ . \ . \ . \quad (2)^{1)};$$

und

$$\delta V = a\,T_1 \cdot \delta\vartheta \left[\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right]_0^l - a\,T_1 \int_0^l d\vartheta \left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} + \vartheta\right) d\varphi.$$

Sind die Enden fest, so ist

$$\delta\vartheta \left[\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right]_0^l = 0;$$

es wird dann die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$a^3\varrho \int_0^l \ddot{\vartheta}\,\delta\vartheta\,d\varphi - a\,T_1 \int_0^l \delta\vartheta \left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} + \vartheta\right) d\varphi = 0,$$

woraus sich, da $\delta\vartheta$ willkürlich ist, ergiebt:

$$a^2\varrho\,\ddot{\vartheta} = T_1\left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} + \vartheta\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3).$$

Das ist die Bewegungsgleichung.

Wenn wir $\vartheta \propto \cos pt$ nehmen, so erhalten wir:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} + \vartheta + \frac{a^2\varrho}{T_1}\,p^2\vartheta = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4),$$

deren Lösung, welche die Bedingung, dass ϑ mit φ verschwindet, erfüllen muss, lautet:

$$\vartheta = A \sin\left\{\frac{a^2\varrho}{T_1}\,p^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} \varphi \cdot \cos pt \quad . \ . \ . \ . \quad (5).$$

Die noch übrigbleibende Bedingung, welche erfüllt werden muss, ist die, dass ϑ verschwindet, wenn $a\varphi = l$ oder $\varphi = \alpha$, wenn $\alpha = l : a$.

---

1) Cambridge Mathematical Tripos Examination 1876.

Das giebt:

$$p^2 = \frac{T_1}{a^2 \varrho}\left(\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} - 1\right) = \frac{T_1}{\varrho}\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2} - \frac{1}{a^2}\right) \ldots (6),$$

worin m eine ganze Zahl ist.

Die Normalfunctionen haben also dieselbe Form, wie für eine gerade Saite, d. i.

$$\vartheta = A \sin\frac{m\pi\varphi}{\alpha}\cos pt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

jedoch ist die Reihe der Perioden eine andere. Die Wirkung der Krümmung ist die, dass dadurch jeder Ton tiefer als der entsprechende Ton einer geraden Saite gemacht wird. Ist $\alpha > \pi$, so ist wenigstens einer der Werthe von p^2 negativ, ein Anzeichen, dass die entsprechende Schwingungsart nicht stabil ist. Wenn $\alpha = \pi$, so wird p_1 gleich Null; die Saite hat in der verschobenen Stellung dieselbe Länge, wie wenn $\vartheta = 0$.

Eine ähnliche Methode kann dazu benutzt werden, um die Bewegung einer rund um den Aequator irgend welcher Umdrehungsfläche gespannten Saite zu berechnen.

140. Die angenäherte Lösung des Problems einer Saite von nahezu aber nicht vollständig gleichförmiger Längendichtigkeit ist im Capitel IV, §. 91 vollständig behandelt worden, als ein zweckmässiges Beispiel für die allgemeine Theorie von angenähert einfachen Systemen. Es wird hier hinreichen das Resultat zu wiederholen. Ist die Dichtigkeit $\varrho_0 + \delta\varrho$, so wird die Periode τ_r der r^{ten} Schwingungscomponente gegeben durch:

$$\tau_r^2 = \frac{4l^2\varrho_0}{T_1}\left\{1 + \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\delta\varrho}{\varrho_0}\sin^2\frac{r\pi x}{l}\,dx\right\} \quad \ldots \quad (1).$$

Nimmt die Unregelmässigkeit die Gestalt eines kleinen Gewichtes von der Masse m im Punkte $x = b$ an, so kann die Formel geschrieben werden:

$$\tau_r^2 = \frac{4l^2\varrho_0}{T_1}\left\{1 + \frac{2m}{l\varrho_0}\sin^2\frac{r\pi b}{l}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Diese Werthe von τ^2 sind richtig, wenn nur die erste Potenz der kleinen Grössen $\delta \varrho$ und m zu berücksichtigen ist; sie geben die Mittel dazu, eine Correction für solche kleine Abweichungen von der Gleichförmigkeit zu berechnen, wie dieselben in der Praxis unausbleiblich sind.

Wie erwartet werden konnte, verschwindet die Einwirkung eines kleinen Gewichtes in den Knotenpunkten und steigt bis zu einem Maximum in den Punkten mitten zwischen zwei auf einander folgenden Knotenpunkten. Wenn man nur eine rohe Schätzung der wirklichen Dichtigkeit einer nahezu gleichförmigen Saite zu machen wünscht, so giebt die Formel an, dass man seine Aufmerksamkeit mehr auf die Nachbarschaft der Schwingungsbäuche wie auf die der Knotenpunkte richten muss.

141. Die Differentialgleichung, welche die Bewegung einer Saite bestimmt, deren Längendichtigkeit ϱ variabel ist, lautet:

$$\varrho \frac{d^2 y}{dt^2} = T_1 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

aus welcher wir, wenn wir $y \propto \cos nt$ nehmen, zur Bestimmung der Normalfunctionen erhalten:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \nu^2 \varrho y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin ν^2 an Stelle von $n^2 : T_1$ geschrieben ist. Diese Gleichung ist von der zweiten Ordnung und linear; es ist jedoch bis jetzt für sie noch keine Lösung in endlichen Ausdrücken gefunden. Betrachten wir sie als Bestimmungsgleichung für die Curve, welche die Saite in der betrachteten Normalschwingungsart annimmt, so bestimmt sie die Krümmung in jedem Punkte und enthält demgemäss eine Regel, nach welcher die Curve graphisch construirt werden kann. Wenn wir daher zum Zwecke ihrer Anwendung auf eine an beiden Enden befestigte Saite von einem der beiden Enden unter einem beliebigen Winkel und mit der Krümmung Null ausgehen, so zeigt uns obige Gleichung stets, unter welcher Krümmung wir weiter gehen müssen. Auf diese Weise kann die ganze Curve ausgezogen werden.

Ist der etwa angenommene Werth von ν^2 richtig, so wird die Curve die x-Axe in dem erforderlichen Abstand vom Endpunkte treffen, das Schwingungsgesetz ist dann vollständig bestimmt. Ist ν^2 nicht bekannt, so können verschiedene Werthe versucht werden, bis die Curve richtig endet; eine genügende Annäherung an den Werth von ν^2 kann man gewöhnlich durch eine auf einen angenommenen Schwingungstypus (wie in §. 88, 90) gegründete Rechnung erhalten.

Ob nun die Längsdichtigkeit gleichförmig ist oder nicht, es wird stets die Schwingungsdauer einer einzelnen einfachen Schwingung *caeteris paribus* variiren wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Spannung, unter welcher die Bewegung stattfindet.

Das umgekehrte Problem die Dichtigkeit zu bestimmen, wenn die Periode und der Typus der Schwingung gegeben ist, lässt sich immer lösen. Zu diesem Zwecke ist es nur nöthig, den gegebenen Werth von y und dessen zweiten Differentialquotienten in Gleichung (2) einzusetzen. Wenn die Dichtigkeit nicht unendlich ist, so sind die Enden einer Saite Punkte mit der Krümmung Null.

Wird eine gegebene Saite verkürzt, so wird jede Toncomponente erhöht. Den neuen Zustand der Dinge kann man sich nämlich von dem alten dadurch abgeleitet denken, dass man sich an dem gewünschten Befestigungspunkt eine Feder (ohne Trägheit) wirkend denkt, deren Steifigkeit allmälig ohne Grenzen wächst. Bei jedem Schritt dieses Processes wird die potentielle Energie einer gegebenen Deformation vermehrt, und daher steigt (§. 88) die Höhe jedes Tones. In gleicher Weise erniedrigt eine Vergrösserung der Länge der Saiten die Tonhöhe, selbst wenn der hinzugefügte Theil keine Trägheit besitzt.

142. Wenn wir auch nicht im Stande sind, eine allgemeine Integration der Gleichung (2) des §. 141 auszuführen, so können wir doch auf dieses Problem einige von den vielen interessanten Eigenschaften der Lösung der linearen Differentialgleichung von der zweiten Ordnung anwenden, welche von

Sturm und Liouville[1]) nachgewiesen sind. In diesem Buche ist es unmöglich, diese Untersuchungen auch nur annähernd vollständig wiederzugeben; indessen wird ein Abriss, in welchem sich die leitenden Züge wiederfinden, von Interesse sein und Licht auf einige Punkte werfen, die mit der allgemeinen Theorie der Schwingungen continuirlicher Körper in Verbindung stehen. Ich habe es nicht für nöthig gehalten, mich ganz enge an die in den Originalabhandlungen gebrauchten Methoden zu halten.

In keinem Punkte der die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \nu^2 \varrho y = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

befriedigenden Curve können zugleich y und $\frac{dy}{dx}$ verschwinden. Durch successive Differentiation von (1) ist es leicht nachzuweisen, dass, wenn y und $\frac{dy}{dx}$ zusammen verschwinden, in demselben Punkt auch alle höheren Differentialcoefficienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. verschwinden müssen, und dass daher nach dem Taylor'schen Satz die Curve mit der x-Axe zusammenfallen muss.

Welchen Werth wir auch ν^2 zuschreiben mögen, die der Gleichung (1) genügende Curve ist eine Sinuscurve, indem sie überall concav gegen die x-Axe ist, weil ϱ überall einen positiven Werth hat. Wenn im Ausgangspunkt y verschwindet und $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, so behält y für alle Werthe von x unter einer gewissen Grenze, die von dem ν^2 ertheilten Werth abhängt, positive Werthe. Ist ν^2 sehr klein, so ist die Krümmung gering, die Curve bleibt auf einer langen Strecke auf der positiven Seite der Axe. Wir haben nun zu beweisen, dass beim An-

---

[1]) Die im Texte erwähnten Abhandlungen befinden sich in dem ersten Bande von Liouville's Journal (1836).

wachsen von v^2 alle Werthe von x, welche der Gleichung $y = 0$ genügen, entsprechend an Grösse abnehmen.

Es sei y' die Ordinate einer zweiten Curve, welche die Bedingung:

$$\frac{d^2 y'}{d x^2} + v'^2 \varrho y' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

erfüllt, ebenso wie die Bedingung, dass y' im Ausgangspunkt verschwindet; wir wollen weiter annehmen, dass v'^2 etwas grösser wie v^2 ist. Durch Multiplication von (2) mit y und von (1) mit y', durch Subtraction und Integration nach x zwischen den Grenzen 0 und x, erhalten wir, da y und y' beide mit x verschwinden:

$$y' \frac{dy}{dx} - y \frac{dy'}{dx} = (v'^2 - v^2) \int_0^x \varrho y y' dx. \quad . \quad . \quad (3).$$

Setzen wir weiter voraus, dass x einem Punkte entspricht, wo y verschwindet und dass der Unterschied zwischen v'^2 und v^2 sehr klein ist, so erhalten wir schliesslich:

$$y' \frac{dy}{dx} = \delta v^2 \int_0^x \varrho y^2 dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Da das Glied rechter Hand von (4) wesentlich positiv ist, so giebt die Gleichung an, dass y' und $\frac{dy}{dx}$ dasselbe Vorzeichen haben und dass daher, ob nun $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ ist, y' stets dasselbe Vorzeichen hat wie das ist, nach dem sich y mit x ändert; oder in anderen Worten, der Werth von x, für welchen y' verschwindet, ist kleiner wie der, für den y gleich Null wird.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den Theil der Curve, welcher zwischen $x = 0$ und $x = l$ liegt, so bleiben die Ordinaten beim Anwachsen von v^2 überall positiv, bis ein gewisser Werth erreicht ist, den wir v_1^2 nennen wollen. Die Function y ist nun in der Form identisch mit der ersten Normalfunction u_1 einer Saite mit der Dichtigkeit ϱ, die in

0 und l befestigt ist, und hat nur in diesen Punkten Wurzeln. Wächst nun v^2 weiter, so bewegt sich die erste Wurzel nach innen von $x = l$ aus bis $x = 0$ hin, bis die Curve, wenn ein zweiter bestimmter Werth $v_2{}^2$ erreicht ist, die Axe wieder in dem Punkte $x = l$ schneidet; sie stellt dann die zweite Normalfunction u_2 dar. Diese Function hat daher zwischen $x = 0$ und $x = l$ eine innere Wurzel und zwar eine einzige. In gleicher Weise erhalten wir entsprechend einem höhern Werthe $v_3{}^2$ die dritte Normalfunction u_3 mit zwei inneren Wurzeln und so weiter. Die $n$te Function u_n hat daher genau $n - 1$ innere Wurzeln; da ihr erster Differentialcoefficient niemals gleichzeitig mit der Function verschwindet, so wird das Zeichen der Function jedesmal beim Passiren einer Wurzel geändert.

Aus der Gleichung (3) geht hervor, dass wenn u_r und u_s zwei verschiedene Normalfunctionen sind, folgendes Integral besteht:

$$\int_0^l \varrho\, u_r\, u_s\, dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Sturm fand einen schönen Satz über die Anzahl von Wurzeln einer Function, die durch Addition von einer endlichen Zahl von Normalfunctionen abgeleitet ist. Ist u_m die Componente der niedrigsten Ordnung und u_n die der höchsten Ordnung, so hat die Function:

$$f(x) = \varphi_m u_m + \varphi_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \varphi_n u_n \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

worin φ_m, φ_{m+1}, etc. willkürliche Constanten sind, wenigstens $m - 1$ und höchstens $n - 1$ innere Wurzeln. Die Enden bei $x = 0$ und $x = l$ entsprechen natürlich in allen Fällen Wurzeln. Der folgende Nachweis hat einige Aehnlichkeit mit dem von Liouville gegebenen, ist jedoch beträchtlich einfacher und, wie ich glaube, nicht weniger streng.

Nehmen wir an, dass $f(x)$ genau μ innere Wurzeln besitzt (worunter eine beliebige Anzahl von gleichen Wurzeln sein kann), so kann die derivirte Function $f'(x)$ nicht weniger wie $\mu + 1$ innere Wurzeln haben, da sich mindestens eine

Wurzel von $f'(x)$ zwischen jedem Paar aufeinander folgender Wurzeln von $f(x)$ befinden muss, und die ganze Anzahl von Wurzeln von $f(x)$ ja $\mu + 2$ beträgt. In gleicher Weise sieht man, dass mindestens μ Wurzeln von $f''(x)$ zwischen den Enden, welche nothwendiger Weise selbst Wurzeln entsprechen, vorhanden sind. Beim Uebergang von $f(x)$ zu $f''(x)$ ist es daher unmöglich, dass irgend eine der Wurzeln verloren geht. Nun haben wir:

$$f''(x) = \varphi_m u''_m + \varphi_{m+1} u''_{n+1} + \cdots + \varphi_n u_n''$$
$$= -\varrho\,(\nu_m^2 \varphi_m u_m + \nu^2_{m+1} \varphi_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \nu_n^2 \varphi_n u_n)\,.(7),$$

wie sich aus (1) ergiebt; daraus schliessen wir, da ϱ stets positiv ist, dass:

$$\nu^2_m \varphi_m u_m + \nu^2_{m+1} \varphi_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \nu_n^2 \varphi_n u_n \ldots (8)$$

mindestens μ Wurzeln besitzt.

Da (8) ein Ausdruck von derselben Form wie $f(x)$ ist, so beweist weiter ein ähnliches Raisonnement, dass:

$$\nu_m^4 \varphi_m u_m + \nu^4_{m+1} \varphi_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \nu_n^4 \varphi_n u_n$$

wenigstens μ innere Wurzeln hat; derselbe Process kann, so weit man will, ausgedehnt werden. Auf diese Weise erhalten wir eine Reihe von Functionen, alle mit wenigstens μ inneren Wurzeln, welche sich von der ursprünglichen Function durch das continuirliche Anwachsen der relativen Bedeutung der Componenten von den höheren Ordnungen unterscheiden. Wenn der Process weit genug getrieben ist, kommen wir schliesslich zu einer Function, deren Form so wenig, wie wir nur wünschen, von der der Normalfunction von der höchsten Ordnung, d. i. u_n, abweicht und welche daher $n - 1$ innere Wurzel hat. Es folgt hieraus, dass, weil bei dem Passiren der Reihe von Functionen keine Wurzel verloren gegangen sein kann, die Anzahl der inneren Wurzeln von $f(x)$ die Zahl $n - 1$ nicht zu übertreffen vermag.

Die andere Hälfte des Satzes wird auf eine ähnliche Weise bewiesen, indem man die Reihe der Functionen nach unten von $f(x)$ aus fortsetzt. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\begin{array}{l} \varphi_m u_m + \varphi_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \varphi_n u_n \\ \nu_m^{-2} \varphi_m u_m + \nu^{-2}_{m+1} \varphi_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \nu_n^{-2} \varphi_n u_n \\ \nu_m^{-4} \varphi_m u_m + \nu^{-4}_{m+1} \varphi_{m+1} u_{m+1} + \cdots + \nu_n^{-4} \varphi_n u_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Man kommt dabei schliesslich zu einer Function, welche der Form nach wesentlich mit der Normalfunction von der niedrigsten Ordnung, d. i. u_m zusammenfällt und daher $m - 1$ innere Wurzeln hat. Da beim Uebergang von dieser Function aufwärts bis zu $f(x)$ durch die obige Reihe von Functionen hindurch keine Wurzeln verloren gehen können, so folgt, dass $f(x)$ nicht weniger wie $m - 1$ Wurzeln hat; es muss aber wohl bedacht werden, dass jede beliebige Anzahl der $m - 1$ Wurzeln unter einander gleich sein können.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass $f(x)$ nur dann identisch gleich Null sein kann, wenn alle Coefficienten φ_m verschwinden. Nehmen wir an, es sei φ_r nicht gleich Null. Wir multipliciren (6) mit ϱu_r und integriren in Bezug auf x zwischen den Grenzen 0 und l. Dann ist nach (5):

$$\int_0^l \varrho u_r f(x)\, dx = \varphi_r \int_0^l \varrho u_r^2\, dx \quad \ldots\ldots (9);$$

woraus wir sehen, dass, da das rechtsstehende Integral endlich ist, $f(x)$ für alle in den Integrationsbereich eingeschlossene Werthe von x nicht verschwinden kann.

Liouville hat Sturm's Theorem benutzt, um zu zeigen, wie eine Reihe von Normalfunctionen sich so zusammensetzen lässt, dass dieselbe ein beliebiges Zeichen in allen Punkten hat, welche zwischen $x = 0$ und $x = l$ liegen. Seine Methode ist etwa die folgende.

Die Werthe von x, für welche die Function das Zeichen wechselt, seien $a, b, c, \ldots$ und zwar seien es Grössen, die wir, ohne an Allgemeinheit zu verlieren, alle als ungleich annehmen dürfen. Wir wollen nun die Reihe der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} u_1(a), & u_1(x) \\ u_2(a), & u_2(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1(a), & u_1(b), & u_1(x) \\ u_2(a), & u_2(b), & u_2(x) \\ u_3(a), & u_3(b), & u_3(x) \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

ins Auge fassen.

Die erste ist eine lineare Function von $u_1(x)$ und $u_2(x)$ und hat daher nach Sturm's Theorem höchstens eine innere Wurzel, welche Wurzel offenbar a ist. Ueberdies ist die Determinante nicht identisch gleich Null, da der Coefficient von $u_2(x)$ d. i. $u_1(a)$ nicht verschwindet, was für einen Werth a auch haben mag. Wir haben daher eine Function erhalten, welche ihr Zeichen in einem beliebigen Punkt a wechselt, und zwar kann a nur innerhalb liegen und dies ist das einzige Mal für einen innern Punkt.

Die zweite Determinante verschwindet, wenn $x = a$ ist, und wenn $x = b$. Da sie nicht mehr wie zwei innere Wurzeln haben kann, ändert sie ihr Zeichen, wenn x durch diese Werthe hin durchgeht und hier nur allein. Der Coefficient von $u_3(x)$ ist der von der ersten Determinante angenommene Werth, wenn $x = b$ ist und hat daher einen endlichen Werth. Daher ist die zweite Determinante nicht identisch gleich Null.

Auf ähnliche Weise verschwindet die dritte Determinante der Reihe und wechselt ihr Zeichen, wenn $x = a$, oder $= b$, oder $= c$ ist und zwar in diesen inneren Punkten allein. Der Coefficient von $u_4(x)$ ist endlich, da er der Werth der zweiten Determinante ist, wenn $x = c$.

Es ist klar, dass wir durch Fortsetzung des Verfahrens Functionen bilden können, die aus den Normalfunctionen zusammengesetzt sind und welche verschwinden und das Zeichen wechseln für jeden beliebigen Werth von x und an keinen anderen Stellen in dem Bereich von $x = 0$ bis $x = l$; oder in anderen Worten, wir können eine Function bilden, deren Zeichen über den ganzen Bereich von $x = 0$ bis $x = l$ willkürlich ist.

Auf dieses Theorem gründete Liouville seinen Beweis für die Möglichkeit, eine beliebige Function zwischen $x = 0$ und $x = l$ durch eine Reihe von Normalfunctionen darzustellen. Nehmen wir diese Möglichkeit an und setzen:

$$f(x) = \varphi_1 u_1(x) + \varphi_2 u_2(x) + \varphi_3 u_3(x) + \ldots \quad (10),$$

so werden die erforderlichen Werthe von φ_1, φ_2 etc. durch (9) bestimmt; wir erhalten:

$$f(x) = \sum \left\{ u_r(x) \int_0^l \varrho u_r(x) f(x)\, dx : \int_0^l \varrho u_r^2(x)\, dx \right\} \quad . \; . \quad (11).$$

Bezeichnen wir die Reihe rechter Hand mit $F(x)$, so bleibt uns noch übrig, die Identität von $f(x)$ und $F(x)$ nachzuweisen.

Multipliciren wir das rechtsstehende Glied von (11) mit $\varrho u_r(x)$ und integriren dasselbe in Bezug auf x von $x = 0$ bis $x = l$, so sehen wir, dass:

$$\int_0^l \varrho u_r(x) F(x)\, dx = \int_0^l \varrho u_r(x) f(x)\, dx,$$

oder, wie wir ebenfalls schreiben können:

$$\int_0^l \{ F(x) - f(x) \} \varrho u_r(x)\, dx = 0 \quad . \; . \; . \quad (12),$$

worin $u_r(x)$ irgend eine Normalfunction ist. Aus (12) folgt, dass:

$$\int_0^l \{F(x) - f(x)\} \{A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + A_3 u_3(x) + \cdots\} \varrho dx = 0 \,.\, (13),$$

worin die Coefficienten A_1, A_2 etc. willkürlich sind.

Ist nun $F(x) - f(x)$ nicht identisch gleich Null, so ist es möglich, die Constanten A_1, A_2, etc. der Art zu wählen, dass $A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + \cdots$ überall dasselbe Zeichen wie $F(x) - f(x)$ hat, in welchem Falle jedes Element des Integrales positiv wäre und Gleichung (13) nicht richtig sein könnte. Es folgt hieraus, dass $F(x) - f(x)$ sich von Null nicht unterscheiden kann, oder dass die Reihe der Normalfunctionen, welche das rechtsstehende Glied von (11) bildet, für alle Werthe von x von $x = 0$ bis $x = l$ identisch mit $f(x)$ ist.

Die Argumente und Resultate dieses Abschnittes sind natürlich auf den besonderen Fall einer gleichförmigen Saite anwendbar, für welche die Normalfunctionen Kreisfunctionen werden.

143. Wenn die Schwingungen einer Saite nicht auf eine Ebene beschränkt sind, so ist es gewöhnlich zweckmässiger, dieselben in zwei Sätze von Schwingungen in senkrecht auf einander stehenden Ebenen aufzulösen, die dann unabhängig von einander behandelt werden können. Es giebt indessen einen hierhin gehörigen, einer vorübergehenden Erwähnung werthen Fall, in welchem die Bewegung ohne Auflösung leichter begriffen und behandelt wird.

Nehmen wir an, dass:

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin\frac{s\pi x}{l}\cos\frac{2s\pi t}{\tau} \\ z &= \sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{2s\pi t}{\tau} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dann ist:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} = \sin\frac{s\pi x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und

$$z : y = \tan\!g\,\frac{2s\pi t}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die ganze Saite in jedem Moment sich in einer Ebene befindet, die sich gleichförmig umdreht, und dass jedes Theilchen einen Kreis mit dem Radius $\sin\frac{s\pi x}{l}$ beschreibt. In der That dreht sich das ganze System ohne relative Verschiebung um seine Gleichgewichtslage, wobei jede Umdrehung in der Zeit $\tau : s$ vollendet wird. Das Mechanische dieses Falles ist ebenso einfach, als wenn die Bewegung auf eine Ebene beschränkt ist, da jetzt die Resultante der Spannungen, die auf die Enden eines jeden kleinen Theiles der Saitenlänge wirken, durch die Centrifugalkraft balancirt wird.

144. Die allgemeine Differentialgleichung für eine gleichförmige Saite, d. i.:

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = a^2 \frac{d^2 y}{d x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

kann durch eine Aenderung der Variabeln transformirt werden in:

$$\frac{d^2 y}{du\,dv} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

worin $u = x - at$, $v = x + at$. Die allgemeine Lösung von (2) ist:

$$y = f(u) + F(v) = f(x - at) + F(x + at) \ldots (3),$$

wobei f und F zwei willkürliche Functionen sind.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, wo F verschwindet. Bei jedem beliebigen Werth von t stellt die Gleichung:

$$y = f(x - at) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

welche die Beziehung zwischen x und y wiedergiebt, die Form der Saite dar. Ein Wechsel in dem Werth von t ist nur gleichbedeutend mit einer Aenderung des Ausgangspunktes der x, so dass (4) angiebt, dass eine gewisse Gestalt der Saite längs der Saite mit gleichförmiger Geschwindigkeit a in der positiven Richtung fortgepflanzt wird. Welches auch der Werth von y in dem Punkte x und zur Zeit t sein mag, denselben Werth wird y im Punkte $x + a\triangle t$ zur Zeit $t + \triangle t$ haben.

Die solcher Art verewigte Form kann jede mögliche sein, so lange dieselbe die Beschränkungen, von welchen (1) abhängt, nicht verletzt.

Wenn die Bewegung in der Fortpflanzung einer Welle nach der positiven Richtung besteht, so herrscht in jedem Punkte eine gewisse Beziehung zwischen der Neigung der Saitencurve und der Geschwindigkeit. Differentiren wir (4), so finden wir:

$$\frac{dy}{dt} = -a\frac{dy}{dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Im Anfang können sowohl $\frac{dy}{dt}$ als $\frac{dy}{dx}$ willkürlich gegeben sein; wenn indess die obige Beziehung nicht erfüllt ist, so kann die Bewegung nicht durch (4) dargestellt werden.

Auf gleiche Weise stellt die Gleichung:

$$y = F(x + at) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

die Fortpflanzung einer Welle in der negativen Richtung dar; die (5) entsprechende Beziehung zwischen $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dy}{dx}$ lautet:

$$\frac{dy}{dt} = a \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

In dem allgemeinen Fall besteht die Bewegung in der gleichzeitigen Fortpflanzung von zwei Wellen mit der Geschwindigkeit a, die eine nach der positiven, die andere nach der negativen Richtung; diese Wellen sind ganz unabhängig von einander. Bei der ersten ist $\frac{dy}{dt} = -a \frac{dy}{dx}$ und bei der zweiten $\frac{dy}{dt} = a \frac{dy}{dx}$. Die Anfangswerthe von $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dy}{dx}$ muss man sich in zwei Theile getheilt denken, welche resp. den Relationen (5) und (7) genügen. Die erste bildet die Welle, welche in der positiven Richtung ohne Gestaltsänderung vorwärts eilt; die zweite bildet die negative Welle. Im Anfang ist:

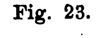
$$\left.\begin{aligned} f'(x) + F'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ f'(x) - F'(x) &= -\frac{1}{a}\frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\},$$

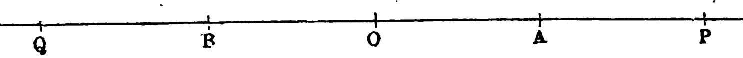
woraus

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{a}\frac{dy}{dt}\right) \\ F'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{a}\frac{dy}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Diese Gleichungen bestimmen die Functionen f' und F' für alle Werthe des Argumentes von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, sobald die Anfangswerthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy}{dt}$ bekannt sind.

Ist die Störung aus der Gleichgewichtslage ursprünglich auf einen endlichen Theil der Saite beschränkt, so trennen sich die positiven und negativen Wellen nach Verlauf eines Zeitrau-


Fig. 23.



mes, gleich demjenigen, welcher für jede Welle erforderlich ist, um die Hälfte des in Bewegung gesetzten Theiles zu durchlaufen.

Nehmen wir z. B. an, dass AB der anfangs bewegte Theil der Saite ist. Ein Punkt P auf der positiven Saite bleibt so lange in Ruhe, bis die positive Welle von A nach P vorgeschritten ist, wird dann während des Durchganges der Welle aus der Gleichgewichtslage herausbewegt und bleibt hernach immer in Ruhe. Die negative Welle berührt P überhaupt nicht. Aehnliches lässt sich *mutatis mutandis* von einem Punkt Q auf der negativen Saite von AB sagen. Ist der Charakter der ursprünglichen Störung der Art, dass im Anfange $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{a}\frac{dy}{dt}$ verschwindet, so ist überhaupt keine positive Welle vorhanden, und der Punkt P wird dann niemals aus seiner Ruhe aufgestört. Verschwindet im Anfange $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{a}\frac{dy}{dt}$, so ist keine negative Welle vorhanden. Verschwindet anfangs nur $\frac{dy}{dt}$, so sind die positive und die negative Welle einander ähnlich und gleich, und dann kann keine von beiden verschwinden. In den Fällen, wo eine der beiden Wellen verschwindet, kann man dies so auffassen, als wenn das Ausfallen dieser Welle von der gegenseitigen Zerstörung zweier Wellencomponenten herrührt, von denen die eine von den Anfangsverschiebungen, und die andere von den Anfangsgeschwindigkeiten abhängt. Auf der einen Saite addiren sich diese beiden Wellen und auf der andern zerstören sie sich gegenseitig. Hierdurch erklärt sich das scheinbare Paradoxon, dass P weder früher noch später, wie AB in Bewegung gesetzt ist, von dieser Bewegung ergriffen wird.

Die nachfolgende Bewegung einer Saite, die anfangs ohne Geschwindigkeit aus dem Gleichgewicht gebracht ist, kann leicht durch graphische Methoden dargestellt werden. Da die positive und negative Welle einander gleich sind, so reicht es hin, die ursprüngliche Störung in zwei gleiche Theile zu theilen, dieselben um eine Strecke gleich at zu verschieben, den einen nach rechts, den andern nach links, und dann dieselben wieder zusammenzusetzen. Wir wollen gleich diese Methode auf den Fall einer gezupften Saite von endlicher Länge anwenden.

145. Schwingungen werden **stationäre** genannt, wenn die Bewegung eines jeden Theilchens des Systems proportional irgend einer, für alle Theilchen gleichen Function von der Zeit sind. Wenn wir der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{d^2y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zu genügen wünschen dadurch, dass wir $y = XT$ nehmen, wo X eine Function von x allein und T eine Function von t allein ist, so haben wir:

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{d(at)^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = m^2 \text{ (eine Constante)},$$

so dass:

$$\left.\begin{aligned} T &= A\cos mat + B\sin mat \\ X &= C\cos mx + D\sin mx \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

ein Beweis dafür, dass die Schwingungen einfach harmonisch sein müssen, wenn auch mit willkürlicher Periode. Der Werth von y kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} y &= P\cos(mat - \varepsilon)\cos(mx - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}P\cos(mat + mx - \varepsilon - \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2}P\cos(mat - mx - \varepsilon + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (3). \end{aligned}$$

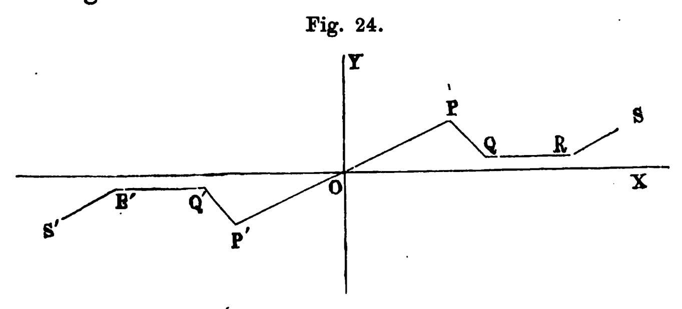
Diese Gleichung zeigt, dass die allgemeinste Art von stationärer Schwingung so angesehen werden kann, als wenn sie von der Uebereinanderlagerung von gleichen vorwärts schreitenden Schwingungen herrühren, deren Fortpflanzungsrichtungen einander entgegengesetzt sind. Umgekehrt können zwei stationäre Schwingungen in eine progressive zusammengesetzt werden.

Die Lösung $y = f(x - at) + F(x + at)$ ist zunächst nur auf eine unendlich lange Saite anzuwenden; sie kann aber der Art interpretirt werden, dass sie in bestimmten Fällen auch die Lösung des Problems für eine endliche Saite giebt. Wir wollen z. B. annehmen, dass die Saite in $x = 0$ endigt, und dort festgehalten wird, während sie sich nur in der positiven Richtung unendlich lang erstreckt. So lange nun der Punkt $x = 0$

wirklich in Ruhe bleibt, ist es gleichgültig, ob die Saite nach der negativen Seite hin verlängert ist oder nicht. Wir werden daher dazu geführt, die gegebene Saite so aufzufassen, als wenn dieselbe einen Theil einer doppelt unendlich langen Saite bildet, und aufzusuchen, ob und wie dann die Anfangsverschiebungen und Geschwindigkeiten auf der negativen Saite der Art gewählt werden können, dass während der nachfolgenden Bewegung überhaupt keine Verschiebung bei $x = 0$ eintritt. Die Anfangswerthe von y und $\dot{y}$ auf der positiven Seite bestimmen die entsprechenden Theile der positiven und negativen Wellen, in welche, wie wir wissen, die ganze Bewegung aufgelöst werden kann. Die erstere hat keinen Einfluss auf den Punkt $x = 0$. Auf der negativen Seite stehen im Anfange die positive und negative Welle zu unserer Disposition, mit der letzteren haben wir aber nichts zu thun. Unsere Aufgabe ist die positive Welle auf der negativen Seite so zu bestimmen, dass dieselbe in Verbindung mit der gegebenen negativen auf der positiven Seite des Anfangspunktes diesen Punkt ungestört lässt.

Es sei $OPQRS$ . . . die Linie (von irgend welcher Gestalt), welche die Welle in OX darstellt, die in der negativen Richtung vorwärts schreitet.

Fig. 24.



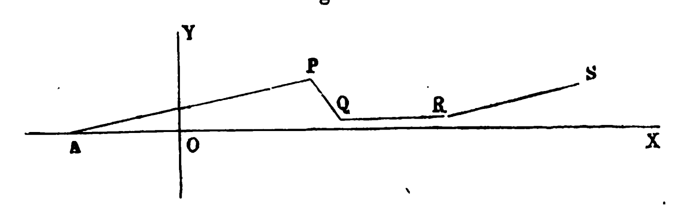
Es ist klar, dass die Anforderungen des vorliegenden Falles erfüllt werden, wenn man auf der andern Seite von O eine Welle nimmt, die die entgegengesetzte Welle genannt werden kann, nämlich eine der Art, dass O das geometrische Centrum ist, welches jede durch diesen Punkt hindurchgehende Sehne (wie etwa PP') in zwei gleiche Hälften trennt. Ana-

lytisch heisst das: wenn $y = f(x)$ die Gleichung von $OPQRS\ldots$ ist, so ist $-y = f(-x)$ die Gleichung von $OP'Q'R'S'\ldots.$ Wenn nun nach einer Zeit t die Curven nach links und rechts vorwärts geschoben sind, resp. um eine Strecke at, so sind die der Abscisse $x = 0$ entsprechenden Coordinaten nothwendiger Weise gleich und einander entgegengesetzt, und geben daher nach ihrer Zusammensetzung eine resultirende Verschiebung gleich Null.

Die Wirkung der Gebundenheit in O kann daher dadurch dargestellt werden, dass man annimmt, die negative Welle bewegt sich ungestört durch O hindurch, zu gleicher Zeit geht dann aber eine positive Welle von O aus. Diese reflectirte Welle kann zu jeder Zeit aus ihrer Ursprungswelle nach der folgenden Regel gefunden werden.

Es sei $APQRS\ldots$ die Lage der Ursprungswelle. Dann ist die reflectirte Welle die Lage, welche diese Welle anneh-

Fig. 25.



men würde, wenn dieselbe um zwei rechte Winkel gedreht würde, zuerst um OX als Drehungsaxe und dann um denselben Winkel um OY. In anderen Worten: die zurückkehrende Welle ist das Bild von $APQRS$, welches durch successive optische Reflexion an den als ebene Spiegel angesehenen OX und OY gebildet wird.

Dasselbe Resultat kann auch auf einem mehr analytischen Wege erhalten werden. In der allgemeinen Lösung:

$$y = f(x - at) + F(x + at)$$

sind die Functionen $f(z)$, $F(z)$ durch die Anfangsbedingungen für alle positiven Werthe von z bestimmt. Die Bedingung bei $x = 0$ erfordert, dass:

$$f(-at) + F(at) = 0$$

für alle positiven Werthe von t oder:

$$f(-z) = -F(z)$$

für alle positiven Werthe von z. Die Functionen f und F sind also für alle positiven Werthe von x und t bestimmt.

Wir finden jetzt keine Schwierigkeit mehr, wenn wir den Verlauf der Dinge skizziren wollen, die eintreten beim Festhalten von zwei Punkten A und B der Saite. Die anfängliche Störung in AB theilt sich selbst in eine positive und eine negative Welle, die zwischen den festen Punkten rückwärts und vorwärts reflectirt werden, und ihren Charakter bei jeder Reflexion ändern, das heisst aus positiven negative werden und *vice versa.* Nach einer geraden Zahl von Reflexionen ist die ursprüngliche Form und Gestalt in jedem Fall wieder hergestellt. Der Vorgang wird in der Vorstellung am leichtesten verfolgt, wenn die anfängliche Verschiebung auf einen kleinen Theil der Saite beschränkt bleibt, und noch specieller, wenn der Charakter der Verschiebung der Art ist, dass dadurch eine Welle entsteht, welche sich nur nach einer Richtung fortpflanzt. Der Anstoss läuft mit gleichförmiger Geschwindigkeit (a) längs der Saite hin und zurück; nachdem er zum zweiten Mal zu seinem Ausgangspunkt zurückgekehrt ist, hat sich der ursprüngliche Zustand genau wieder hergestellt. Die Periode der Bewegung ist also die Zeit, welche der Anstoss nöthig hat, um die Länge der Saite zweimal zu durchlaufen, oder:

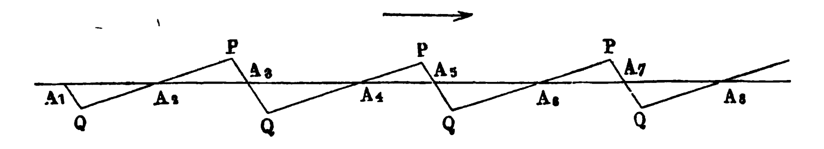
$$\tau = \frac{2l}{a} \quad \text{. . . . . (1).}$$

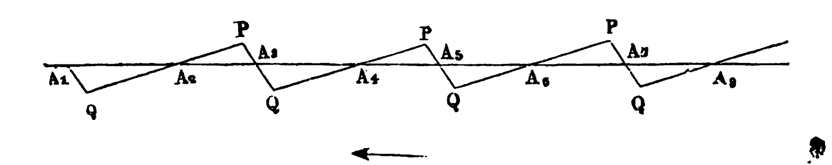
Dasselbe Gesetz hat augenscheinlich noch Gültigkeit, welches auch der Charakter der ursprünglichen Störung sein mag; nur in dem allgemeinern Fall, wo die ursprüngliche Erschütterung sich nach zwei Seiten zugleich fortpflanzt, kann es vorkommen, dass die kürzeste Periode des Rücklaufes irgend ein aliquoter Theil von τ ist.

146. Die Methode der letzten Abschnitte kann mit Vortheil auf den Fall einer gezupften Saite angewandt werden.

Da die Anfangsgeschwindigkeit verschwindet, so gehört die Hälfte der Verschiebung der positiven, und die andere Hälfte der negativen Welle an. Die Art und Weise, wie die Welle ergänzt werden muss, um dieselbe Wirkung wie die Gebundenheit zu erzielen, zeigt sich in der Figur, in welcher

Fig. 26.





die obere Curve die positive Welle und die untere die negative Welle in ihren Anfangslagen darstellt. Um die Gestalt der Saite in jedem späteren Zeitmoment zu finden, müssen die Curven über einander gelagert werden, nachdem die obere nach rechts und die untere nach links, beide um die Strecke *a t*, verschoben sind.

Die resultirende Curve wird wie ihre Componenten von geraden Stücken gebildet. Eine Aufeinanderfolge von sechs in Intervallen von ein Zwölftel einer Periode auf einander folgenden Gestalten der gezupften Saite, welche den Verlauf der Schwingung wiederspiegeln, findet sich in der Fig. 27 a. f. S., die Helmholtz entliehen ist.

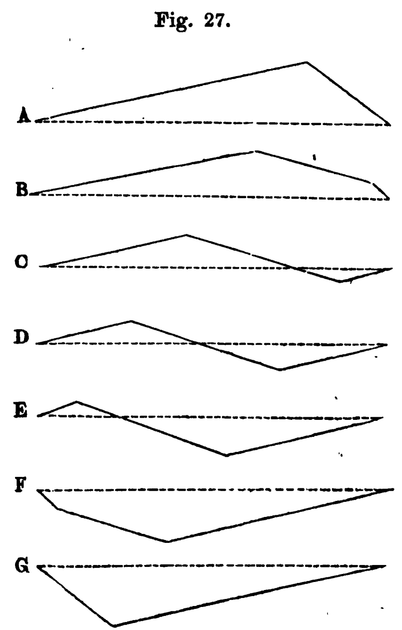
Von *G* kehrt die Saite wieder in den Zustand *A* zurück rückwärts durch dieselben Stadien, welche in der Figur gezeichnet sind [1]).

---

[1]) Diese Methode, die Schwingung einer gezupften Saite zu behandeln, verdanken wir Young. Phil. Trans. 1800. Dem Leser

Es ist zu beachten, dass die Neigung der Saite an den zwei Unterstützungspunkten zwischen zwei constanten Werthen abwechselt.

Fig. 27.



147. Wird zur Zeit t in dem Punkte x einer unendlich langen Saite eine kleine Störung hervorgebracht, so wird die Wirkung hiervon in O erst nach dem Verlauf der Zeit $x : a$ gefühlt, und ist in jeder Hinsicht dieselbe, als wenn eine gleiche Störung im Punkte $x + \triangle x$ zur Zeit $t - \triangle x : a$ erfolgt. Nehmen wir nun an, dass der Saite gleiche Störungen in Zeitintervallen τ in Punkten ertheilt werden, deren Abstände von O jedes Mal um $a\,\delta\tau$ wachsen, so ist es klar, dass die Wirkung in O dieselbe ist, als wenn alle Störungen in einem Punkte erfolgt wären, vorausgesetzt, dass das Zeitintervall zwischen zwei auf einander folgenden Störungen von τ auf $\tau + \delta\tau$

---

wird empfohlen, sich mit derselben selbst vertraut zu machen, dadurch, dass er wirklich die Gestalten von Fig. 27 construirt.

gewachsen wäre. Diese Bemerkung enthält die Theorie der Aenderung der Tonhöhe, welche von der Bewegung der Störungsquelle herrührt: ein Gegenstand, der uns in Verbindung mit Luftschwingungen wieder begegnen wird.

148. Muss ein Punkt einer unendlich langen Saite erzwungene Schwingungen ausführen, so gehen von demselben nach beiden Seiten Wellenzüge aus nach Gesetzen, die leicht aufzusuchen sind. Wir wollen annehmen, dass der Coordinatenanfangspunkt der Ort der Erregung ist, und dass die Saite dort durch Zwang die Bewegung $y = Ae^{ipt}$ ausführe. Es reicht hin, die positive Seite ins Auge zu fassen. Widersteht der Bewegung eines jeden Elementes ds die Reibungskraft $\varkappa \dot{y} ds$, so lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varkappa \frac{dy}{dt} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \dots\dots\dots \quad (1);$$

oder da $y \propto e^{ipt}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{i\varkappa p}{a^2} - \frac{p^2}{a^2}\right) y = \lambda^2 y \quad \dots\dots \quad (2),$$

wenn wir der Kürze halber λ^2 statt des Coefficienten von y schreiben.

Die allgemeine Lösung ist:

$$y = \{ Ce^{-\lambda x} + De^{+\lambda x} \} e^{ipt} \quad \dots\dots \quad (3).$$

Da nun y nach der Annahme in einer unendlichen Entfernung verschwindet, so muss D verschwinden, wenn der reelle Theil von λ positiv genommen wird. Es sei:

$$\lambda = \alpha + i\beta,$$

wo α positiv ist.

Dann ist die Lösung:

$$y = Ae^{-(\alpha + i\beta)x + ipt} \quad \dots\dots\dots \quad (4),$$

oder, indem man den imaginären Theil weglässt:

$$y = Ae^{-\alpha x} \cos (pt - \beta x) \quad \dots\dots \quad (5),$$

entsprechend der erzwungenen Bewegung im Anfangspunkt:

$$y = A \cos pt \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6).$$

Es kann natürlich zu t eine willkürliche Constante hinzugefügt werden.

Um α und β zu bestimmen, haben wir:

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{p^2}{a^2}; \quad 2\alpha\beta = \frac{\varkappa p}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Nehmen wir an, dass $\varkappa$ klein ist, so wird:

$$\beta = \frac{p}{a}, \quad \alpha = \frac{\varkappa}{2a} \text{ nahezu}$$

und:

$$y = Ae^{-\frac{\varkappa}{2a}x} \cos\left(pt - \frac{p}{a}x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Diese Lösung zeigt, dass eine Welle längs der Saite fortgepflanzt wird, deren Amplitude vermöge des Werthes des Exponentialfactors wenig abnimmt. Ist $\varkappa = 0$, so verschwindet dieser Factor, und wir haben einfach:

$$y = A \cos\left(pt - \frac{px}{a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Dieses Resultat steht im Gegensatz zu dem allgemeinen Gesetz, dass die erzwungenen Schwingungen eines Systems (welche durch eine einfache harmonische Function hervorgerufen werden) überall in Bezug auf die Phase synchron sein müssen, wenn keine Reibung vorhanden ist. Gemäss der Gliechung (9) ändert sich im Gegentheil die Phase continuirlich längs der Saite beim Uebergang von einem Punkt zum andern. Das wirkliche Sachverhältniss ist das, dass wir nicht die Freiheit besitzen, $\varkappa = 0$ in (8) anzunehmen, um so mehr nicht, da diese Gleichung unter der Voraussetzung erhalten wurde, dass der reelle Theil von λ in (3) positiv und nicht gleich Null ist. Wie lang eine endliche Saite auch sein mag, man kann den Reibungscoefficienten so klein nehmen, dass die Schwingungen, bevor sie das andere Ende erreichen, nicht durch Dämpfung verschwinden. Von diesem kleinen Werthe der Reibung abwärts fangen reflectirte Wellen an, das Resultat zu compliciren; wenn die Reibung auf unendlich wenig reducirt ist, muss eine unendliche Reihe solcher reflectirter Wellen in Rechnung ge-

zogen werden und diese ergeben dann eine resultirende Bewegung, welche überall dieselbe Phase hat.

Dieses Problem kann für eine Saite, deren Masse in gleich weit abstehenden Punkten concentrirt gedacht wird, nach der Methode des §. 120 gelöst werden. Man kann die Coordinate ψ_1 als gegeben annehmen ($= A e^{ipt}$); man findet dann, dass das Gleichungssystem (5) erfüllt wird, wenn man setzt:

$$\psi_r = \vartheta^{r-1} \psi_1,$$

worin ϑ eine complexe Constante ist, die durch eine quadratische Gleichung bestimmt wird. Das Resultat für eine continuirliche Saite lässt sich dann hinterher ableiten.

Siebentes Capitel.

Longitudinal- und Torsionsschwingungen von Stäben.

149. Das System, welches der Saite an Einfachheit zunächst kommt, ist der Stab, unter welchem Ausdruck gewöhnlich in der Akustik eine Materienmenge von gleichmässiger Substanz und verlängerter cylindrischer Gestalt verstanden wird. An den Enden wird der Cylinder abgeschnitten durch Ebenen, die senkrecht zu den erzeugenden Linien sind. Die Schwerpunkte der transversalen Querschnitte liegen auf einer geraden Linie, welche die Axe genannt wird.

Es giebt drei Arten unter den Schwingungen eines Stabes: die Longitudinal-, Torsions- und Transversal- (seitlichen) Schwingungen. Von diesen sind die letzten die wichtigsten, zugleich aber für die Theorie auch die schwierigsten. Dieselben werden in dem nächsten Capitel für sich betrachtet und sollen hier nur in so weit erwähnt werden, als es zur Vergleichung und zum Gegensatze mit den beiden anderen Arten von Schwingungen nöthig ist.

Longitudinalschwingungen sind solche, bei welchen die Axe unbewegt bleibt, während die transversalen Querschnitte in Richtungen senkrecht zu ihren Ebenen hin und zurück bewegt werden können. Die bewegende Kraft ist der Widerstand, welchen der Stab einer Ausdehnung oder Verdichtung entgegensetzt.

Eine Eigenthümlichkeit dieser Classe von Schwingungen springt sofort ins Auge. Da die Kraft, welche nothwendig ist, um einen Stab um ein Bestimmtes auszudehnen, proportional dem Querschnitt ist, während die bewegte Masse derselben Grösse proportional ist, so folgt, dass bei einem Stabe von bestimmter Länge und bestimmtem Material die Schwingungsdauer und die Schwingungsarten von der Grösse und der Gestalt des Querschnitts unabhängig sind.

Ein gleiches Gesetz ergiebt sich, wie wir gleich sehen werden, bei Torsionsschwingungen.

Anders ist es, wenn die Schwingungen transversale sind. Die Schwingungsdauer ist in der That dann unabhängig von der Dicke des Stabes in der senkrecht zur Bewegungsebene stehenden Richtung; aber die bewegende Kraft in diesem Falle, d. i. der Widerstand gegen die Biegung, wächst schneller, wie die Dicke in der Biegungsebene, und daher ist ein Anwachsen der Dicke von einer Erhöhung des Tones begleitet.

Bei longitudinalen und transversalen Schwingungen sind die zu beachtenden mechanischen Constanten: die Dichte des Materials und der Werth von Young's Modul (Elasticitätsmodul). Für kleine Ausdehnungen (oder Zusammendrückungen) gilt Hooke's Gesetz, nach welchem die Spannung sich wie die Ausdehnung ändert. Wird die Dehnung, d. i.:

$$\frac{\text{wirkliche Länge} - \text{natürliche Länge}}{\text{natürliche Länge}},$$

ε genannt, so haben wir $T = q\varepsilon$, wo q Young's Elasticitätsmodul und T die Spannung bedeutet, welche auf der Flächeneinheit nothwendig ist, um die Dehnung ε hervorzubringen. Young's Elasticitätsmodul kann daher als die Kraft definirt werden, welche einen Stab von der Querschnittseinheit angreifen muss, um die Länge desselben zu verdoppeln, vorausgesetzt, dass Hooke's Gesetz für so grosse Dehnungen gültig bleibt; die Dimensionen dieses Moduls sind daher die einer Kraft, dividirt durch eine Fläche.

Die Torsionsschwingungen hängen ebenso von einer zweiten elastischen Constanten μ ab, deren Erklärung an dem geeigneten Orte ins Auge gefasst werden wird.

Wenn auch theoretisch die drei Classen von Schwingungen, welche von dem Widerstande resp. gegen Dehnung, Torsion und Biegung abhängen, ganz von einander verschieden sind, und auch unabhängig, so lange wie die Quadrate der einzelnen Zwange, die die Verschiebungen bewirken, vernachlässigt werden können, so ist es doch bei Stäben, welche weder im Materiale gleichförmig, noch genau cylindrisch in der Gestalt sind, häufig unmöglich, longitudinale oder Torsionsschwingungen ohne die Begleitung von einem gewissen Maasse von transversaler Bewegung zu erregen. In Stäben von gewöhnlichen Dimensionen ist die tiefste transversale Bewegung viel tiefer, wie die tiefste Longitudinal- oder Torsionsbewegung, und folgerichtig wird es im Allgemeinen eintreten, dass der Grundton von jeder der beiden letzten Arten in der Tonhöhe mehr oder weniger vollkommen mit irgend einem Oberton der ersten Art übereinstimmt. Unter solchen Umständen werden die regulären Schwingungsarten labil, eine kleine Unregelmässigkeit kann eine grosse Wirkung hervorrufen. Die Schwierigkeit, reine Longitudinalschwingungen in einem Stabe hervorzurufen, ist ähnlich der, mit welcher man zu kämpfen hat, wenn man eine Saite zum Schwingen in einer Ebene bringen will.

Nach dieser Auseinandersetzung können wir nun weiter dazu übergehen, die drei Classen von Schwingungen unabhängig von einander zu betrachten, indem wir mit longitudinalen Schwingungen beginnen, da diese in der That keine mathematischen Fragen, ausser den in den vorhergehenden Capiteln schon behandelten, aufwerfen.

150. Wird ein Stab durch eine parallel seiner Länge wirkende Kraft gedehnt, so ist die Ausdehnung im Allgemeinen von einer seitlichen Contraction von der Art begleitet, dass die Volumvergrösserung geringer ist, als wenn die Verschiebung eines jeden Theilchens parallel zur Axe geschähe. Bei einem kurzen Stabe und einem nahe der cylindrischen Grenzfläche gelegenen Theilchen ist die transversale Bewegung an Grösse mit der longitudinalen Bewegung vergleichbar und darf nicht ohne das Risico eines beträchtlichen Irrthums über-

sehen werden. Wo aber ein Stab, dessen Länge gross im Verhältniss zu den Lineardimensionen seines Querschnittes ist, einer dehnenden Kraft von überall demselben Vorzeichen ausgesetzt ist, vergrössert sich die longitudinale Bewegung; daher kann bei gewöhnlichen Stäben, welche in den tieferen Schwingungsarten longitudinal schwingen, die Trägheit der seitlichen Bewegung vernachlässigt werden. Ueberdies werden wir später sehen, auf welche Weise sich eine Correction einführen lässt, falls dieselbe doch noch erforderlich sein sollte.

Der Abstand der Partikelchen, welche in irgend einem Querschnitt liegen, von der Gleichgewichtslage des einen Endes sei x für den Fall, dass der Stab nicht gedehnt ist, weder unter Wirkung einer permanenten Spannung noch als Resultat von Schwingungen; ξ sei die Verschiebung, so dass die wirkliche Lage durch $x + \xi$ gegeben wird. Wenn die Gleichgewichts- und die wirkliche Lage einer benachbarten Schicht respective sind $x + \delta x$ und $x + \delta x + \xi + \frac{\delta \xi}{\delta x} \delta x$, so ist die Verlängerung $\frac{d\xi}{dx}$. Daher haben wir, wenn T die auf der Flächeneinheit senkrecht zum Querschnitt wirkende Spannung ist:

$$T = q \frac{d\xi}{dx} \quad \text{. . . . . (1).}$$

Fassen wir jetzt die Kräfte ins Auge, welche auf die von x und $x + \delta x$ begrenzte Scheibe wirken. Ist der Querschnitt gleich ω, so wird nach (1) die Spannung in x gegeben durch $q\omega \frac{d\xi}{dx}$; dieselbe wirkt in der negativen Richtung. Die Spannung in $x + \delta x$ ist:

$$q\omega \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d^2\xi}{dx^2} \delta x\right),$$

und wirkt in der positiven Richtung. Daher ist die auf die Scheibe wirkende Kraft, welche von den anliegenden Theilen herrührt, im Ganzen:

$$q\omega \frac{d^2\xi}{dx^2} \delta x.$$

Die Masse des einzelnen Elementes ist $\varrho\,\omega\,\delta x$, wenn ϱ die ursprüngliche Dichtigkeit. Daher lautet, wenn X die auf das Element wirkende beschleunigende Kraft ist, die Gleichung für das Gleichgewicht:

$$X + \frac{q}{\varrho}\frac{d^2\xi}{dx^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

In dem Folgenden wird es nicht erforderlich sein, die Einwirkung einer äussern Kraft ins Auge zu fassen.

Um die Bewegungsgleichung zu finden, haben wir nur X durch die Reaction gegen die Beschleunigung — $\ddot{\xi}$ — zu ersetzen. Führen wir dann nur noch ein $a^2 = q : \varrho$, so erhalten wir:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\xi}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form, wie die, welche auf die Transversalverschiebungen einer gedehnten Saite anwendbar ist und giebt die ungestörte Fortpflanzung der Wellen jeder Art in der positiven und negativen Richtung an. Die Geschwindigkeit a bezieht sich auf den ungedehnten Zustand des Stabes; die wirklich auftretende Geschwindigkeit, mit der eine Störung fortgepflanzt wird, ist in dem Verhältnisse der gedehnten und ungedehnten Längen irgend eines Theiles des Stabes grösser. Dieser Unterschied hat eine materielle Wichtigkeit nur im Falle einer dauernden Spannung.

151. Für die wirkliche Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben wir:

$$a^2 = q : \varrho = q\omega : \varrho\omega,$$

welches das Verhältniss der ganzen, zur Verdoppelung der Stablänge (nach Hooke's Gesetz) nöthigen Spannung und der Längsdichtigkeit ist. Wenn derselbe Stab mit der ganzen Spannung T gedehnt und biegsam wäre, so würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs desselben sein: $\sqrt{(T : \varrho\omega)}$ (wie bei der Saite). Damit also in beiden Fällen die Geschwindigkeit dieselbe ist, muss T gleich $q\omega$ sein, oder in anderen Worten: die Spannung muss die sein, welche

theoretisch nothwendig ist, um die Länge zu verdoppeln. Die Töne von longitudinal schwingenden Stäben sind daher sehr hoch im Vergleich mit den Tönen, welche man von Saiten von annähernd derselben Länge erhält.

Beim Stahl beträgt der Werth von q etwa $22 . 10^8$ Gramm Gewicht per Quadratcentimeter. Um dieses in absoluten Krafteinheiten nach dem C. G. S.[1])-System auszudrücken, müssen wir den betreffenden Werth mit 980 multipliciren. In demselben System ist die Dichtigkeit des Stahls (identisch mit dem specifischen Gewicht desselben in Bezug auf Wasser) 7,8. Daher haben wir für Stahl:

$$a = \sqrt{\frac{980 . 22 . 10^8}{7,8}} = 530\,000$$

angenähert. Dieser Werth sagt aus, dass die Geschwindigkeit des Schalles im Stahl ungefähr 530000 Centimeter in der Secunde ist, oder 16 Mal grösser, wie die Geschwindigkeit in der Luft. Im Glase ist die Geschwindigkeit ungefähr dieselbe wie im Stahl.

Es muss erwähnt werden, dass der durch statische Experimente ermittelte Werth von q nicht genau derjenige ist, welcher hier benutzt werden musste. Wie bei den Gasen, welche in einem spätern Capitel behandelt werden, sind die raschen Zustandsänderungen, die bei der Fortpflanzung des Schalles mit einbegriffen sind, mit Wärmewirkungen verbunden. Eine Wirkung hiervon ist die, dass der wirkliche Werth von q grösser wird, wie der, welchen man aus Beobachtungen, die über die Ausdehnung bei constanter Temperatur angestellt werden, erhält. Indess sind die vorhandenen Versuchsdaten noch nicht genau genug, um diese Correction bei festen Körpern von irgend einem Einfluss zu machen.

152. Die Lösung der allgemeinen Gleichung für die Longitudinalschwingungen eines unbegrenzten Stabes, nämlich:

$$\xi = f(x - at) + F(x + at),$$

---

[1]) Centimeter, Gramm, Secunde. Dieses System wurde auch von einem Comité der British Association empfohlen. Brit. Ass. Report, 1873.

braucht nicht weiter betrachtet zu werden, da sie dieselbe, wie die auf eine Saite anwendbare, ist.

Sind beide Enden eines Stabes frei, so ist natürlich keine permanente Spannung vorhanden, ausserdem findet sich an den Enden selbst auch keine vorübergehende Spannung. Die Bedingung für ein freies Ende lautet daher:

$$\frac{d\xi}{dx} = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1).$$

Um die Normalschwingungsarten zu bestimmen, müssen wir annehmen, dass sich ξ wie eine harmonische Function der Zeit ändert, etwa wie $\cos nat$. Dann muss ξ als eine Function von x noch der Gleichung genügen:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + n^2\xi = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2),$$

deren vollständiges Integral ist:

$$\xi = A \cos nx + B \sin nx \quad \dots \dots \dots \quad (3),$$

worin A und B unabhängig von x sind.

Da nun $\frac{d\xi}{dx}$ immer verschwindet, wenn $x = 0$ ist, so muss $B = 0$ sein. Da weiter $\frac{d\xi}{dx}$ verschwindet, wenn $x = l$ (der natürlichen Länge des Stabes), so ist $\sin nl = 0$, ein Zeichen dafür, dass n von der Form:

$$n = \frac{i\pi}{l} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

ist, wo i eine ganze Zahl bedeutet.

Demnach sind die Normalschwingungsarten durch Gleichungen von der Form:

$$\xi = A \cos \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at}{l} \quad \dots \dots \dots \quad (5),$$

gegeben, in denen natürlich, wenn es etwa gewünscht wird, zu t eine willkürliche Constante hinzugefügt werden kann.

Die vollständige Lösung für einen an beiden Enden freien Stab wird deshalb ausgedrückt durch:

$$\xi = \sum_{i=0}^{i=\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} \left\{A_i \cos \frac{i\pi at}{l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{l}\right\} \quad \dots \quad (6),$$

wo A_i und B_i willkürliche Constanten sind, die in der gewöhnlichen Weise bestimmt werden können, wenn die Anfangswerthe von ξ und $\dot{\xi}$ gegeben sind.

Es kann i auch den Werth Null haben; dieser Werth giebt ein Glied, welches eine Verschiebung ξ darstellt, die sowohl in Bezug auf Raum wie auf Zeit constant ist, und thatsächlich nur eine Verschiebung des Anfangspunktes bedeutet.

Die Periode der tiefsten Toncomponente in (6), welche $i = 1$ entspricht, ist $2\,l : a$; es ist dies die Zeit, die eine Störung gebraucht, um die Länge des Stabes zweimal zu durchlaufen. Die anderen Töne, welche sich ergeben, wenn man dem i die verschiedenen ganzzahligen Werthe beilegt, bilden eine vollständige harmonische Scala, so dass nach dieser Theorie der von einem in longitudinale Schwingungen versetzten Stab gebildete Klang in allen Fällen musikalisch ist.

Bei der tiefsten Schwingungsart ist der Mittelpunkt des Stabes, wo $x = \frac{1}{2}\,l$ ist, eine Stelle, die nicht in Bewegung geräth, oder ein Knotenpunkt; die periodisch wiederkehrende Verlängerung oder Zusammendrückung hat aber dort ein Maximum.

153. Der Fall eines Stabes mit einem freien und einem festen Ende kann aus der allgemeinen Lösung des Falles eines Stabes mit zwei freien Enden und von der doppelten Länge abgeleitet werden. Denn man kann, welches auch der Anfangszustand des Stabes, der bei $x = 0$ frei und bei $x = l$ befestigt ist, sein mag, den Querschnitten eines Stabes, der die Länge $2\,l$ besitzt und an beiden Enden frei ist, immer solche Verschiebungen und Geschwindigkeiten ertheilen, dass die Bewegungen der Theile zwischen 0 und l in beiden Fällen identisch sind. Es ist nur die Voraussetzung nöthig, dass im Anfange die Verschiebungen und Geschwindigkeiten in dem Bereiche von l bis $2\,l$ denjenigen gleich und entgegengesetzt gerichtet sind, welche sich in dem Theile des Stabes von 0 bis l in einem gleichen Abstande von dem Mittelpunkte $x = l$ vorfinden. Unter diesen Umständen muss aus Symmetriegründen

der Mittelpunkt während der ganzen Bewegung unbewegt bleiben, und dann erfüllt der Theil von 0 bis l alle verlangten Bedingungen. Wir schliessen hieraus, dass die Schwingungen eines an einem Ende freien und an dem andern befestigten Stabes identisch sind mit denen der einen Hälfte eines Stabes von der doppelten Länge, dessen beide Enden frei sind, vorausgesetzt, dass der letztere nur in den ungleichen Arten schwingt, welche man erhält, wenn man nach und nach dem i alle ungeraden ganzen Zahlenwerthe ertheilt. Die Töne des Stabes gehören dann noch einer harmonischen Scala an, indessen fehlen die geraden Töne (Octave etc. des Fundamentaltones).

Die Periode des tiefsten Tones ist die Zeit, welche ein Anstoss gebraucht, um viermal die Länge des Stabes zu durchlaufen.

154. Sind beide Enden fest, so sind die an den Enden zu erfüllenden Bedingungen die, dass der Werth von ξ dort unveränderlich ist. Wir können annehmen, dass bei $x = 0$ auch $\xi = 0$ ist. Bei $x = l$ ist ξ eine kleine Constante α, die gleich Null, wenn dort keine dauernde Spannung stattfindet. Unabhängig von den Schwingungen haben wir offenbar $\xi = x\alpha : l$; wir werden unser Resultat dann am einfachsten finden, wenn wir sofort diesen Ausdruck für ξ nehmen. Indessen mag es lehrreicher sein, nach der allgemeinen Methode vorzugehen.

Nehmen wir an, dass ξ als Function von der Zeit sich ändert wie der Ausdruck:

$$A \cos nat + B \sin nat,$$

so sehen wir, dass ξ als Function von x der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + n^2\xi = 0$$

genügen muss, deren allgemeine Lösung ist:

$$\xi = C \cos nx + D \sin nx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Da aber ξ für alle Werthe von t immer zugleich mit x gleich Null sein muss, so ist $C = 0$; wir können also schreiben:

$$\xi = \Sigma \sin nx \, \{A \cos nat + B \sin nat\}.$$

Die Bedingung bei $x = l$ giebt:

$$\Sigma \sin nl \, \{A \cos nat + B \sin nat\} = \alpha,$$

woraus folgt, dass für jeden endlichen zulässigen Werth von n:

$$\sin nl = 0 \text{ oder } n = \frac{i\pi}{l}.$$

Für $n = 0$ haben wir dagegen:

$$A_0 \sin nl = \alpha.$$

Das entsprechende Glied in ξ ist:

$$\xi = A_0 \sin nx = \alpha \frac{\sin nx}{\sin nl} = \alpha \frac{x}{l}.$$

Demgemäss lautet der vollständige Ausdruck für ξ:

$$\xi = \alpha \frac{x}{l} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left\{ A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Reihe der Töne bildet eine vollständige, harmonische Scala. (Aus dieser können indessen in den einzelnen Fällen irgend welche Zahl von Gliedern fehlen.) Die Periode der tiefsten Componente ist die Zeit, welche ein Impuls gebraucht, um die Länge des Stabes zweimal zu durchlaufen, also dieselbe, als wenn beide Enden frei wären. Es muss beachtet werden, dass wir hier mit der ungedehnten Länge des Stabes zu thun haben, und dass die für eine gegebene natürliche Länge geltende Periode von einer permanenten Spannung unabhängig ist.

Die Lösung des Problems eines doppelt befestigten Stabes, auf den keine permanente Spannung wirkt, kann auf dieselbe Weise von dem Problem eines an beiden Enden freien Stabes durch blosse Differentiationen nach x abgeleitet werden. Denn in dem letzteren Problem erfüllt $\frac{d\xi}{dx}$ folgende nothwendige Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) = a^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right),$$

in soweit, wie ξ der Gleichung genügt:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\xi}{dx^2};$$

und an beiden Enden verschwindet $\frac{d\xi}{dx}$. Demgemäss erfüllt $\frac{d\xi}{dx}$ in diesem Problem alle die Bedingungen, welche dem ξ in dem Falle, wo beide Enden fest sind, vorgeschrieben sind. Die zwei Reihen der Töne in den beiden Fällen sind daher identisch.

155. Die Einwirkung eines in irgend einem Punkte des Stabes angebrachten kleinen Gewichtes M lässt sich leicht angenähert berechnen, da die Annahme hinreichend genau ist, dass die Art der Schwingung ungeändert bleibt (§. 88). Wir wollen einen Stab nehmen, der bei $x = 0$ befestigt und bei $x = l$ frei ist. Die kinetische Energie ist proportional:

$$\frac{1}{2}\int_0^l \varrho\omega \sin^2 \frac{i\pi x}{2l}\, dx + \frac{1}{2} M \sin^2 \frac{i\pi x}{2l},$$

oder proportional:

$$\frac{\varrho\omega l}{4}\left(1 + \frac{2M}{\varrho\omega l} \sin^2 \frac{i\pi x}{2l}\right).$$

Da die potentielle Energie ungeändert bleibt, so sehen wir nach den Principien des vierten Capitels, dass die Wirkung eines kleinen Gewichtes M in einer Entfernung x von dem festen Ende die ist, dass die Perioden der Toncomponenten in dem Verhältniss:

$$1 : 1 + \frac{M}{\varrho\omega l} \sin^2 \frac{i\pi x}{2l}$$

verlängert wird. Die kleine Grösse $M : \varrho\omega l$ ist das Verhältniss der Belastung zu der ganzen Masse des Stabes.

Wird das Gewicht an dem freien Ende angebracht, so ist $\sin^2 \frac{i\pi x}{2l} = 1$. Die Wirkung ist dann die, dass die Höhe jedes Tones um dasselbe kleine Intervall erniedrigt wird. Man muss daran denken, dass i hier eine ungerade ganze Zahl ist.

156. Ein anderes, erwähnenswerthes Problem ergiebt sich in dem Falle, wo die Belastung an dem freien Ende gross ist im Vergleich zu der Masse des Stabes. In diesem Falle können wir als Schwingungstypus einen Zustand annehmen, bei dem längs des Stabes eine gleichförmige Ausdehnung herrscht.

Ist ξ die Verschiebung des Gewichts M, so ist die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 \int_0^l \varrho \omega \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 \left(M + \frac{1}{3} \varrho \omega l\right) \ldots (1).$$

Die der Verschiebung ξ entsprechende Spannung ist $q \omega \frac{\xi}{l}$; daher lautet die potentielle Energie der Verschiebung:

$$V = \frac{q \omega \xi^2}{2 l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die Bewegungsgleichung ist:

$$\left(M + \frac{1}{3} \varrho \omega l\right) \ddot{\xi} + \frac{q \omega}{l} \xi = 0,$$

und wenn $\xi \propto \cos pt$:

$$p^2 = \frac{q \omega}{l} : \left(M + \frac{1}{3} \varrho \omega l\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Die aus der Trägheit des Stabes herrührende Correction ist daher äquivalent einer Hinzufügung von einem Drittel der Masse des Stabes zu M.

157. Wir wollen unsere mathematische Discussion der Longitudinalschwingungen eines Stabes mit der Berechnung des Fehlers schliessen, welchen wir machen, wenn die seitlichen Bewegungen der Theile des Stabes, die nicht in der Axe liegen, vernachlässigt werden. Das Verhältniss der seitlichen Contraction zur Längsdehnung sei μ; dann ist im Falle des Gleichgewichts die seitliche Verschiebung eines im Abstande r von der Axe befindlichen Theilchens gleich $\mu r \varepsilon$, wo ε die Längsdehnung bedeutet. Wenn auch dieser Werth genau gesprochen durch die Trägheit der seitlichen Bewegung etwas

geändert wird, so kann er für unsern jetzigen Zweck doch als hinreichend genau genommen werden.

Die Constante μ ist eine Zahl, welche zwischen 0 und $^1/_2$ liegt. Wäre μ negativ, so würde eine Längsdehnung eine seitliche Anschwellung hervorrufen; wäre μ grösser als $^1/_2$, so würde die seitliche Contraction gross genug sein, um die Verlängerung zu überwiegen und demnach eine Volumverminderung des Ganzen bewirken. Der letztere Zustand ist mit Stabilität nicht verträglich, und der erstere kann bei gewöhnlichen festen Körpern wohl kaum möglich sein. Man nahm eine Zeit lang an, dass μ nothwendiger Weise gleich $^1/_4$ ist, so dass nur eine unabhängige elastische Constante vorhanden wäre; indess haben Versuche gezeigt, dass μ veränderlich ist. Für Glas und Messing fand Werthheim durch den Versuch $\mu = {}^1/_3$.

Bezeichnet η die seitliche Verschiebung des um r von der Axe abstehenden Theilchens und ist der Querschnitt kreisförmig, so ist die von der seitlichen Bewegung herrührende kinetische Energie:

$$\delta T = \pi \varrho \int_0^l \int_0^r \dot{\eta}^2 dx \,.\, r dr$$

$$= \frac{\varrho\, \omega\, \mu^2 r^2}{4} \cdot \int_0^l \left(\frac{d\dot{\xi}}{dx}\right)^2 dx.$$

Daher ist die ganze kinetische Energie:

$$T + \delta T = \frac{\varrho\, \omega}{2} \int_0^l \dot{\xi}^2 dx + \frac{\varrho\, \omega\, u^2 r^2}{4} \int_0^l \left(\frac{d\dot{\xi}}{dx}\right)^2 dx.$$

Bei einem an beiden Enden freien Stabe haben wir:

$$\xi \propto cos\, \frac{i\pi x}{l}, \quad \frac{d\xi}{dx} \propto - \frac{i\pi}{l}\, sin\, \frac{i\pi x}{l},$$

und daher:

$$T + \delta T : T = 1 + \frac{i^2 \mu^2 \pi^2}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2}.$$

Die Wirkung der Trägheit der seitlichen Bewegung ist daher die, dass dadurch die Periode in dem Verhältnisse von:

$$1 : 1 + \frac{i^2\mu^2\pi^2}{4} \frac{r^2}{l^2}$$

vergrössert wird. Diese Correction ist für die tieferen Schwingungsarten von Stäben mit gewöhnlichen Längen- und Breitenverhältnissen beinahe unmerkbar.

158. Man kann die Versuche über Longitudinalschwingungen mit Stäben von Holz oder Glas anstellen. Die Schwingungen werden durch Reibung, bei Glas mittelst eines feuchten Tuches, erregt. Bei Metall- oder hölzernen Stäben muss man Leder, das mit gepulvertem Colophonium bestreut ist, gebrauchen. „Die Longitudinalschwingungen einer Klaviersaite können dadurch erzeugt werden, dass man dieselben longitudinal sanft mit einem Stück Gummi reibt, die der Violine dadurch, dass man den Bogen schräg gegen die Saite stellt und ihn longitudinal längs der Saite fortbewegt, indem derselbe Punkt des Bogens auf der Saite bleibt. Der Klang ist in beiden Fällen unangenehm schrill."

„Wird der Wirbel der Violine gedreht, so weit, dass dadurch die Höhe der seitlichen Schwingungen beträchtlich geändert wird, so tritt im Gegensatze dazu eine sehr geringe Aenderung in der Höhe der Longitudinalschwingungen ein. Der Grund hierzu ist folgender: Bei den seitlichen Schwingungen hängt die Aenderung in der Geschwindigkeit der Wellenübertragung hauptsächlich von der Aenderung der Spannung ab, und diese Aenderung ist beträchtlich. Dagegen hängt bei den Longitudinalschwingungen die Aenderung in der Geschwindigkeit der Wellenübertragung von der Aenderung der Ausdehnung ab, die vergleichsweise klein ist[1])."

Savart bemerkte bei seinen Versuchen über Longitudinalschwingungen gelegentlich einen eigenthümlichen Ton, von ihm *„son rauque"* genannt, dessen Tonhöhe eine Octave unter der der Longitudinalschwingung war. Nach Terquem[2]) ist die Ursache dieses Tones eine transversale Schwingung, deren

---

[1]) Donkin's Acoustics, p. 154.

[2]) Ann. de Chimie, LVII, 129 — 190.

Auftreten durch eine angenäherte Uebereinstimmung zwischen ihrer eigenen Periode und der der Suboctave der Longitudinalschwingung veranlasst wird. Ist diese Ansicht richtig, so wäre diese Erscheinung von der zweiten Ordnung, die wahrscheinlich auf der Thatsache beruht, dass eine longitudinale Compression eines Stabes eine Krümmung hervorzurufen bestrebt ist.

159. Die zweite Classe von Schwingungen, Torsionsschwingungen genannt, welche von dem Widerstande gegen Verdrehung abhängt, hat eine sehr geringe Bedeutung. Ein voller oder hohler cylindrischer Stab mit kreisförmigem Querschnitt möge durch zweckmässige, an dem einen Ende angebrachte Kräfte so verdreht werden, dass jeder transversale Querschnitt in seiner eigenen Ebene bleibt. Ist der Querschnitt nicht kreisförmig, so ist die Wirkung einer Verdrehung complicirter, da die Drillung nothwendiger Weise von einer Ausbiegung der ursprünglich die normalen Querschnitte ausmachenden Schichten begleitet ist. Wenn auch die Wirkungen der Ausbiegung in jedem Falle, wo es der Mühe werth wäre, bestimmt werden könnten, so wollen wir uns hier doch auf den Fall eines kreisförmigen Querschnitts beschränken, wobei keine Bewegung parallel der Axe des Stabes vorausgesetzt wird.

Die Kraft, welche die Drillung als Widerstand findet, hängt von einer elastischen Constante ab, die verschieden von q ist und Starrheit genannt wird. Bezeichnen wir dieselbe mit n, so lässt sich das Verhältniss zwischen q, n und μ folgendermaassen schreiben:

$$n = \frac{q}{2(\mu + 1)} \quad \text{. . . . . (1)[1],}$$

Danach liegt n zwischen $\frac{1}{2} q$ und $\frac{1}{3} q$. Wenn $\mu = \frac{1}{3}$, so ist $n = \frac{3}{8} q$.

[1]) Thomson und Tait §. 683. Es bezieht sich diese Relation, wie zu bemerken ist, nur auf isotrope Körper.

Wir wollen annehmen, wir hätten zu thun mit einem Stabe in der Form einer dünnen Röhre mit dem Radius r und von der Dicke dr; ϑ bezeichne die Winkelverschiebung jedes Querschnittes, der um x vom Anfangsquerschnitt entfernt ist. Der Grad der Drillung bei x wird dargestellt durch $\frac{d\vartheta}{dx}$, und die Schiebung des die Röhre ausmachenden Materials durch $r\frac{d\vartheta}{dx}$. Die widerstrebende Kraft ist per Flächeneinheit $nr\frac{d\vartheta}{dx}$; da der Flächeninhalt gleich $2\pi r\,dr$ ist, so beträgt das Drehungsmoment um die Axe:

$$2n\pi r^3 dr\frac{d\vartheta}{dx}.$$

Daher besitzt die auf die Scheibe dx wirkende zurücktreibende Kraft das Drehungsmoment:

$$2n\pi r^3 dr\,dx\frac{d^2\vartheta}{dx^2}.$$

Das Trägheitsmoment der ins Auge gefassten Scheibe ist nun $2\pi r\,dr\,.\,dx\,.\,\varrho r^2$; in Folge dessen nimmt die Bewegungsgleichung folgende Form an:

$$\varrho\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=n\frac{d^2\vartheta}{dx^2} \qquad \text{(2).}$$

Da in dieser Gleichung r nicht auftritt, so ist dieselbe Gleichung anwendbar auf einen Cylinder von endlicher Dicke oder auch auf einen Vollcylinder.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist: $\sqrt{\frac{n}{\varrho}}$; die ganze Theorie ist genau ähnlich der der Longitudinalschwingungen, da die Bedingung für ein freies Ende ist $\frac{d\vartheta}{dx}=0$, und für ein festes $\vartheta=0$, oder wenn eine dauernde Verdrehung betrachtet wird, $\vartheta=$ Constans.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalschwingungen verhält sich zu der der Torsionsschwingungen wie $\sqrt{q}:\sqrt{n}$ oder $\sqrt{(2+2\mu)}:1$. Dasselbe Verhältniss tritt auf

bei den Schwingungszahlen für Stäbe von gleicher Länge, welche unter entsprechenden Endbedingungen in entsprechenden Arten schwingen. Ist $\mu = \frac{1}{3}$, so würde das Verhältniss der Schwingungszahlen sein:

$$\sqrt{q} : \sqrt{n} = \sqrt{8} : \sqrt{3} = 1{,}63,$$

welches einem etwas grösseren Intervall, wie einer Quinte, entsprechen würde.

In jedem Falle muss das Verhältniss der Schwingungszahlen liegen zwischen:

$$\sqrt{2} : 1 = 1{,}414 \text{ und } \sqrt{3} : 1 = 1{,}732.$$

Longitudinale und Torsionsschwingungen wurden zuerst von Chladni untersucht.

Achtes Capitel.

Transversal- (seitliche) Schwingungen von Stäben.

160. Wir wollen in diesem Capitel die Transversalschwingungen von dünnen elastischen Stäben, welche in ihrem natürlichen Zustande gerade sind, untersuchen. Nach den Schwingungen der Saiten ist diese Classe von Schwingungen vielleicht für theoretische und experimentelle Prüfung am zugänglichsten. Es sind hinreichend Schwierigkeiten vorhanden, um einige wichtige, mit der allgemeinen Theorie verbundene Punkte klar ins Licht zu stellen. Bei den Saiten wäre der Leser wegen seiner Vertrautheit mit den Kreisfunctionen vielleicht geneigt gewesen, zu flüchtig über diese Punkte hinwegzugehen. Zu gleicher Zeit sind aber die Schwierigkeiten der Analysis nicht der Art, dass deswegen auf allgemeine mathematische und physikalische Principien mehr wie sonst geachtet werden muss.

Es scheint, dass Daniel Bernoulli[1]) zunächst das Problem angegriffen hat. Euler, Riccati, Poisson, Cauchy und neuerdings Strehlke[2]), Lisssajous[3]) und A. Seebeck[4]) haben unser Wissen über dasselbe am meisten gefördert.

[1]) Comment. Acad. Petrop. t. XIII.

[2]) Pogg. Ann. Bd. XXVII.

[3]) Ann. de Chimie (3) XXX, 385.

[4]) Abhandlungen d. Math.-Phys. Classe d. K. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften. Leipzig 1852.

161 (T. 594 bis 601, 673, 693, 695, 711 bis 715). Das Problem zerfällt von selbst in zwei Theile je nach der Gegenwart oder Abwesenheit einer permanenten, longitudinalen Spannung. Das Hineinziehen einer permanenten Spannung macht das Problem verwickelter und ist nur von Interesse bei gespannten Saiten, deren Steifigkeit, wenn sie auch klein ist, doch nicht vollständig vernachlässigt werden kann. Wir wollen daher unsere Aufmerksamkeit hauptsächlich auf die beiden extremen Fälle richten: 1) wenn keine permanente Spannung vorhanden ist, und 2) wenn die Spannung die Haupttriebkraft bei der Schwingung abgiebt.

In Betreff des Querschnitts unseres Stabes wollen wir annehmen, dass eine Hauptaxe desselben in der Schwingungsebene liegt, so dass die Biegung in jedem Theile in der Richtung des Maximums oder des Minimums (oder des stationären Werthes) des Widerstandsmomentes (Widerstandes) der Biegung liegt. Z. B. kann die Oberfläche des Stabes eine Umdrehungsfläche sein, wobei jeder Querschnitt kreisförmig, wenn auch nicht nothwendiger Weise überall mit demselben Radius, ist. Unter diesen Umständen ist die potentielle Energie der Biegung für jedes Längenelement proportional dem Quadrate der Krümmung multiplicirt mit einer Grösse, welche von der Substanz des Stabes abhängt und von dem Trägheitsmoment des transversalen Querschnitts in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Querschnitts hindurchgeht und senkrecht zur Biegungsebene steht. Es sei ω der Flächeninhalt des Querschnitts, $\varkappa^2\omega$ das Trägheitsmoment des letztern, q der Elasticitätsmodul, ds das Längenelement und dV die einer Krümmung $1 : R$ der Axe des Stabes entsprechende potentielle Energie; dann haben wir:

$$dV = \frac{1}{2}\, q \varkappa^2 \omega \frac{ds}{R^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Dieses Resultat erhält man leicht, wenn man die Ausdehnung der verschiedenen Fasern berechnet, aus denen man sich den Stab zusammengesetzt denken kann. Es sei η der Abstand der Projection einer Faser des Querschnitts $d\omega$ auf die

Biegungsebene von der Axe an gerechnet. Dann wird durch die Biegung die Länge der Faser in dem Verhältnisse:

$$1 : 1 + \frac{\eta}{R}$$

geändert, wenn R der Krümmungsradius. Auf der Seite der Axe, wo η positiv ist, d. i. auf der äussern Seite, wird die Faser gedehnt, während auf der andern Seite der Axe Zusammenziehung stattfindet. Die zur Hervorbringung der Ausdehnung $\frac{\eta}{R}$ nöthige Kraft ist nach der Definition des Elasticitätsmodul $q\frac{\eta}{R}\,d\omega$; daher hat das ganze Kräftepaar, welches sich der Biegung widersetzt, den Werth:

$$\int q\frac{\eta}{R}\,.\,\eta\,.\,d\omega = \frac{q}{R}\,\varkappa^2\omega,$$

wenn ω der Flächeninhalt des Querschnitts und $\varkappa$ sein Gyrationsradius (T. 281) um eine Linie durch die Axe und senkrecht zur Biegungsebene ist. Der einer Länge ds der Axe entsprechende Biegungswinkel ist $ds : R$ und daher beträgt die Arbeit, welche nothwendig ist, dem Stück ds eine Krümmung $1 : R$ beizubringen:

$$\frac{1}{2}\,q\varkappa^2\omega\,\frac{ds}{R^2},$$

da das Mittel der Kraft die Hälfte des Endwerthes des Kräftepaares ist.

Für einen kreisförmigen Querschnitt ist $\varkappa$ gleich dem halben Radius.

Dass die potentielle Energie der Biegung *caeteris paribus* dem Quadrate der Krümmung proportional sein würde, ist von vornherein klar. Bezeichnen wir den Coefficienten von $\frac{ds}{R^2}$ mit B, so können wir setzen:

$$V = \frac{1}{2}\int B\,\frac{ds}{R^2}$$

oder Angesichts des Umstandes, dass der Stab nahezu gerade geblieben ist:

$$V = \frac{1}{2} \int B \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 d x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

worin y die seitliche Verschiebung desjenigen Punktes der Axe des Stabes bedeutet, dessen Abscisse, parallel der Gleichgewichtslage gemessen, x ist. Bei einem Stabe, dessen Querschnitte ähnlich und ähnlich gelegen sind, ist B eine Constante und kann vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Die kinetische Energie des sich bewegenden Stabes rührt theils von der Verschiebungsbewegung der Elemente, welche den Stab zusammensetzen, parallel y her, theils von der Rotation derselben Elemente um Axen, die durch ihre Schwerpunkte hindurchgehen und senkrecht zur Schwingungsebene stehen. Der erste Theil wird ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{2} \int \varrho \, \omega \, \dot{y}^2 d x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

wenn ϱ die Volumdichtigkeit bedeutet. Um den letzten Theil auszudrücken haben wir nur darauf zu achten, dass die Winkelverschiebung des Elementes dx gleich $\frac{dy}{dx}$ ist, und daher die Winkelgeschwindigkeit gleich $\frac{d}{dt} \frac{dy}{dx}$. Das Quadrat dieser Grösse muss mit dem halben Trägheitsmoment des Elementes multiplicirt werden, d. i. mit: $\frac{1}{2} \varkappa^2 \varrho \, \omega \, \delta x$. Wir erhalten demnach:

$$T = \frac{1}{2} \int \varrho \, \omega \, \dot{y}^2 d x + \frac{1}{2} \int \varkappa^2 \varrho \, \omega \left(\frac{d}{dt} \frac{dy}{dx}\right)^2 d x \; . \; . \; (4).$$

162. Um die Bewegungsgleichung zu bilden, können wir uns des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bedienen. Der Einfachheit halber wollen wir uns auf den Fall von überall gleichem Querschnitt beschränken; dann haben wir:

$$\delta V = B \int \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 \delta y}{dx^2} dx$$
$$= B \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{d \delta y}{dx} - B \frac{d^3 y}{dx^3} \delta y + B \int \frac{d^4 y}{dx^4} \delta y \, dx \, . \quad . \quad (1),$$

worin die nicht unter einem Integralzeichen stehenden Ausdrücke zwischen Grenzen zu nehmen sind. Dieser Ausdruck enthält nur die aus der Biegung entstehenden inneren Kräfte. In dem Folgenden wollen wir nun annehmen, dass keine von aussen wirkenden Kräfte vorhanden sind oder wenigstens keine solche, welche auf das System Arbeit leisten. Eine Kraft von der Art einer Gebundenheit wie etwa die, welche nothwendig ist, um irgend einen Punkt des Stabes in Ruhe zu halten, braucht nicht betrachtet zu werden, da dieselbe keine Arbeit thut und daher in der Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten nicht erscheinen kann.

Das virtuelle Moment der Beschleunigung ist:

$$\int \varrho \omega \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y \, dx + \int \varrho \omega \varkappa^2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dy}{dx}\right) \delta \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$$
$$= \int \varrho \omega \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \varkappa^2 \frac{d^4 y}{dx^2 dt^2}\right) \delta y \, dx + \varrho \omega \varkappa^2 \delta y \frac{d^3 y}{dt^2 dx} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Daher lautet die Variationsgleichung der Bewegung:

$$\int \left\{ B \frac{d^4 y}{dx^4} + \varrho \omega \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \varkappa^2 \frac{d^4 y}{dx^2 dt^2}\right) \right\} \delta y \, dx$$
$$+ B \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx}\right) + \left\{ \varrho \omega \varkappa^2 \frac{d^3 y}{dt^2 dx} - B \frac{d^3 y}{dx^3} \right\} \delta y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die nicht unter einem Integralzeichen stehenden Glieder sind wieder zwischen Grenzen zu nehmen. Hieraus ergiebt sich für die in allen Punkten der Stablänge zu erfüllende Gleichung:

$$B \frac{d^4 y}{dx^4} + \varrho \omega \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \varkappa^2 \frac{d^4 y}{dx^2 dt^2}\right) = 0,$$

während an jedem Ende:

$$B \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx}\right) + \left\{ \varrho \omega \varkappa^2 \frac{dy^3}{dt^2 dx} - B \frac{d^3 y}{dx^3} \right\} \delta y = 0,$$

oder wenn wir den Werth von B, d. i. $q \varkappa^2 \omega$, einführen, und setzen $q : \varrho = b^2$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \varkappa^2 \frac{d^4 y}{dx^4} - \varkappa^2 \frac{d^4 y}{dx^2\, dt^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

und für jedes Ende:

$$b^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx}\right) + \left\{\frac{d^3 y}{dt^2\, dx} - b^2 \frac{d^3 y}{dx^3}\right\} \delta y = 0 \ldots (5).$$

In diesen Gleichungen drückt b die Geschwindigkeit der Uebertragung von longitudinalen Wellen aus.

Die an den Enden zu erfüllende Bedingung (5) nimmt je nach den besonderen vorliegenden Umständen verschiedene Formen an. Man kann sich eine solche Gebundenheit denken, dass das Verhältniss $\delta \left(\frac{dy}{dx}\right) : \delta y$ einen endlichen, vorgeschriebenen Werth hat. Die zweite Grenzbedingung erhält man dann aus (5), wenn man dieses Verhältniss einführt. In all' den Fällen aber, mit welchen wir zu thun haben, ist entweder gar keine Gebundenheit vorhanden, oder eine Gebundenheit von der Art, dass entweder $\delta \left(\frac{dy}{dx}\right)$ oder δy verschwindet; dann nehmen die Grenzbedingungen folgende Form an:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \left\{\frac{d^3 y}{dt^2 dx} - b^2 \frac{d^3 y}{dx^3}\right\} \delta y = 0 \,.\,. \,(6).$$

Wir müssen jetzt die einzelnen Fälle, welche eintreten können, unterscheiden. Ist ein Ende frei, so ist sowohl δy wie $\delta \left(\frac{dy}{dx}\right)$ willkürlich; die Bedingungen an den Enden werden dann:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dt^2\, dx} - b^2 \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Man kann diese Gleichungen so auffassen, dass die erste anzeigt, dass an dem freien Ende kein Kräftepaar angreift, und die zweite ebenso, dass dort auch keine einzelne Kraftresultante wirkt.

Ist die Richtung an dem Ende frei, ist das Ende selbst aber durch die Einwirkung einer hinreichend grossen Kraft gezwungen in Ruhe zu bleiben (in welchem Falle man aus Mangel eines bessern Ausdruckes sagt, der Stab wird gehalten), so sind die Bedingungen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \delta y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

wodurch (5) erfüllt wird.

Eine dritte Classe tritt auf, wenn auf ein Ende ein derartiger Zwang ausgeübt wird, dass die Richtung durch die Einwirkung eines hinlänglich grossen Kräftepaares festgehalten wird, dass aber sonst dieses Ende jede beliebige Lage annehmen kann. Wir haben dann:

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \frac{d^3y}{dt^2\,dx} - b^2\frac{d^3y}{dx^3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Viertens kann das Ende sowohl in Bezug auf Lage als auf Richtung gebunden sein. In diesem Falle sagt man, der Stab sei festgeklemmt. Die Bedingungen sind einfach:

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \delta y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Von diesen vier Fällen sind der erste und der letzte die wichtigeren; den dritten wollen wir ganz bei Seite lassen, da wir noch nicht über experimentelle Hülfsmittel verfügen, durch welche die genannte Gebundenheit verwirklicht werden könnte. Selbst bei dieser Vereinfachung bleibt doch noch eine beträchtliche Mannigfaltigkeit in den Problemen zur Discussion übrig, da jedes der beiden Enden des Stabes frei, festgeklemmt oder gehalten sein kann. Indess ist die sich hieraus ergebende Complication nicht so gross, wie man wohl erwarten möchte. Wir werden finden, dass verschiedenartige Fälle zusammen behandelt werden können und dass die Lösung für einen Fall sich manchmal unmittelbar aus der Lösung für einen andern Fall ableiten lässt.

Bei den Versuchen über die Schwingungen von Stäben kann die Bedingung für ein festgeklemmtes Ende mittelst

eines Schraubstockes von massiver Construction verwirklicht werden. Bei einem freien Ende liegt natürlich, so weit das Ende selbst in Betracht kommt, keine Schwierigkeit vor; wenn aber beide Enden frei sein sollen, erhebt sich die Frage, auf welche Weise das Gewicht des Stabes getragen werden soll. Um mit der Schwingung so wenig wie möglich in Collision zu kommen, müssen die Unterstützungen in der Nähe der Knotenpunkte liegen. Manchmal reicht es hin, bloss den Stab auf Stege zu legen, oder eine Schlinge aus Schnur rund um den Stab zu legen und dieselbe durch, an deren Enden angebrachte, Schrauben gespannt zu halten. Für genauere Untersuchungen würde es vielleicht vorzuziehen sein, das Gewicht des Stabes von einem Nagel tragen zu lassen, der durch ein Loch geht, welches in der Schwingungsebene durch die Mitte der in der Schwingungsebene liegenden Stabdicke gebohrt ist.

Soll ein Ende gehalten werden, so kann man dasselbe gegen eine feste Platte pressen, deren Ebene senkrecht zu der Längsrichtung des Stabes ist.

163. Bevor wir weiter gehen, wollen wir eine Annahme einführen, die die Rechnung bedeutend vereinfacht und doch die Richtigkeit der Lösung nicht ernstlich gefährdet. Wir wollen annehmen, dass die Glieder, welche von der Winkelbewegung der Querschnitte der Stabes abhängen, vernachlässigt werden dürfen. Es ist dies gleichbedeutend mit der Voraussetzung, dass das Trägheitsvermögen eines jeden Querschnittes auf dessen Mittelpunkt concentrirt ist. Wir werden später (§. 186) eine Correction für das Trägheitsvermögen der Drehung aufsuchen und dann finden, dass dasselbe unter gewöhnlichen Umständen klein ist. Die Bewegungsgleichung wird nun:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varkappa^2 b^2 \frac{d^4y}{dx^4} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

und die Grenzbedingungen für ein freies Ende:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Der nächste Schritt ist, wenn wir mit unserm allgemeinen Plan in Uebereinstimmung bleiben wollen, die Annahme einer harmonischen Form für y. Wir können zweckmässig setzen:

$$y = u \cos\left(\frac{\varkappa b}{l^2} m^2 t\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin l die Länge des Stabes und m eine abstracte Zahl bedeutet, deren Werth noch bestimmt werden muss. Setzen wir diesen Werth in (1) ein, so erhalten wir:

$$\frac{d^4 u}{d x^4} = \frac{m^4}{l^4} u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ist $u = e^{p\frac{m x}{l}}$ eine Lösung dieser Gleichung, so sehen wir, dass p eine der vier Wurzeln der Einheit ist, d. i. $+1, -1, +i, -i$; die vollständige Lösung stellt sich demnach folgendermassen:

$$u = A \cos m \frac{x}{l} + B \sin m \frac{x}{l} + C e^{\frac{m x}{l}} + D e^{-\frac{m x}{l}}$$

mit vier willkürlichen Constanten.

Wir haben noch den vier Endbedingungen zu genügen, zwei für jedes Ende. Diese Bedingungen bestimmen die Verhältnisse $A : B : C : D$, und liefern ausserdem eine Gleichung, der m genügen muss. Daher ist nur eine Reihe von particulären Werthen von m zulässig, und für jedes m ist das entsprechende u vollkommen bestimmt mit Ausnahme eines constanten Factors. Wir werden die verschiedenen, zu demselben System gehörigen Functionen u durch Indices von einander unterscheiden.

Der in irgend einem Moment vorhandene Werth von y kann in eine Reihe der Functionen u entwickelt werden (§§. 92. 93). Sind φ_1, φ_2 etc. die Normalcoordinaten, so haben wir:

$$y = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

und

$$T = \frac{1}{2} \varrho \omega \int (\dot{\varphi}_1 u_1 + \dot{\varphi}_2 u_2 + \cdots)^2 dx$$
$$= \frac{1}{2} \varrho \omega \left\{ \dot{\varphi}_1^2 \int u_1^2 dx + \dot{\varphi}_2^2 \int u_2^2 dx + \cdots \right\} \ldots (6).$$

Wir sind an dieser Stelle vollkommen zu der Behauptung berechtigt, dass jedes Productenintegral der Functionen verschwindet, und braucht die Rechnung des folgenden Abschnittes daher nur als eine Verification des schon Bewiesenen betrachtet zu werden. Dieselbe ist aber dazu nöthig, um den Werth der Quadraten-Integrale zu bestimmen.

164. Es mögen u_m und $u_{m'}$ zwei der Normalfunctionen bezeichnen, welche resp. m und m' entsprechen. Dann ist:

$$\frac{d^4 u_m}{d x^4} = \frac{m^4}{l^4} u_m, \quad \frac{d^4 u_{m'}}{d x^4} = \frac{m'^4}{l^4} u_{m'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

oder, wenn Accente die Differentiation nach $m\,\frac{x}{l}$ und $m'\,\frac{x}{l}$ anzeigen:

$$u_m'''' = u_m, \quad u_{m'}'''' = u_{m'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Multipliciren wir die Gleichung (2) mit resp. $u_{m'}$ und u_m, ziehen sie dann von einander ab und integriren sie über die Länge des Stabes, so haben wir:

$$\frac{m'^4 - m^4}{l^4} \int u_m u_{m'}\, dx = \int \left(u_m \frac{d^4 u_{m'}}{d x^4} - u_{m'} \frac{d^4 u_m}{d x^4} \right) dx$$

$$= u_m \frac{d^3 u_{m'}}{d x^3} - u_{m'} \frac{d^3 u_m}{d x^3} + \frac{d u_{m'}}{d x} \frac{d^2 u_m}{d x^2} - \frac{d u_m}{d x} \frac{d^2 u_{m'}}{d x^2} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die integrirten Glieder sind dabei zwischen Grenzen zu nehmen.

Ob nun das fragliche Ende festgeklemmt, gehalten oder frei [1]) ist, jedes Glied verschwindet wegen des einen oder des

[1]) Der Leser wird bemerken, dass die hier specificirten Fälle nur particuläre Fälle sind, und dass die rechte Seite von (3) immer verschwindet, vorausgesetzt dass:

$$u_m : \frac{d^3 u_m}{d x^3} = u_{m'} : \frac{d^3 u_{m'}}{d x^3},$$

und

$$\frac{d u_m}{d x} : \frac{d^2 u_m}{d x^2} = \frac{d u_{m'}}{d x} : \frac{d^2 u_{m'}}{d x^2}.$$

Diese Bedingungen enthalten z. B. den Fall, wo das Ende eines Stabes durch eine der Verschiebung proportionale Kraft gegen die Gleichgewichtslage getrieben wird, wie bei einer Feder ohne Trägheit.

andern seiner Factoren. Wir können daraus schliessen, dass, wenn u_m und $u_{m'}$ sich auf zwei Schwingungsarten beziehen, welche der Stab annehmen kann (und die natürlich denselben Endbedingungen entsprechen), dass dann:

$$\int u_m u_{m'} \, dx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

vorausgesetzt, dass u_m und $u_{m'}$ von einander verschieden sind.

Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass wir in der eben befolgten Rechnung thatsächlich die Schritte rückwärts gegangen sind, durch welche die fundamentale Differentialgleichung selbst in §. 162 bewiesen wurde. Die ursprüngliche Gleichung, welche das Verschwinden der Variation ausdrückt, ist es, welche mit der conjugirten Eigenschaft am unmittelbarsten in Verbindung steht. Bezeichnen wir y mit u und δy mit v, so haben wir:

$$\delta V = B \int \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \, dx;$$

die in Frage stehende Gleichung ist dann:

$$B \int \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \, dx + \varrho \, \omega \int \ddot{u} v \, dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wir wollen nun annehmen, dass sich u auf eine Normalschwingungscomponente bezieht, so dass $\ddot{u} + n^2 u = 0$, wo n eine Constante ist; dann haben wir:

$$n^2 \varrho \, \omega \int u v \, dx = B \int \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \, dx.$$

Durch ein ähnliches Raisonnement erhalten wir, wenn v eine Normalfunction ist und u irgend eine dem System mögliche Verschiebung darstellt:

$$n'^2 \varrho \, \omega \int u v \, dx = B \int \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} \, dx.$$

Wir schliessen hieraus, dass, wenn u und v beide Normalfunctionen sind, die verschiedene Perioden besitzen:

$$\int u v \, dx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Dieser Beweis ist augenscheinlich so direct und allgemein, wie man sich nur wünschen kann.

Der Leser möge selbst die Gleichung (6) entsprechende Formel aufsuchen für den Fall, dass das Glied, welches das Beharrungsvermögen der Rotation enthält, nicht unterdrückt wird.

Mittelst (6) können wir den Nachweis liefern, dass die zulässigen Werthe von n^2 reell sind. Denn wenn n^2 complex, und $u = \alpha + i\beta$ eine Normalfunction wäre, so würde $\alpha - i\beta$ der conjugirte Werth von u, auch eine Normalfunction sein entsprechend dem conjugirten Werth von n^2. Dann aber würde das Integral der Producte der beiden Functionen, da es eine Summe von Quadraten ist, nicht verschwinden [1]).

Haben in (3) m und m' denselben Werth, so wird die Gleichung identisch richtig; wir können daraus den Werth von $\int u_m^2\,dx$ nicht auf einmal herleiten. Wir müssen m' gleich $m + \delta m$ setzen und dann die Grenzform der Gleichung ziehen, wenn δm allmälig verschwindet. Auf diese Weise finden wir:

$$\frac{4m^3}{l^4}\int u_m^2\,dx =$$

$$u\,\frac{d}{dm}\,\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{du}{dm}\,\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d}{dm}\,\frac{du}{dx} - \frac{du}{dx}\,\frac{d}{dm}\,\frac{d^2u}{dx^2},$$

wobei die rechte Seite zwischen Grenzen zu nehmen ist.

Nun ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{m}{l}\,u' \text{ etc.}, \quad \frac{du}{dm} = \frac{x}{l}\,u' \text{ etc.},$$

und daher:

$$\frac{4m^3}{l^4}\int u_m^2\,dx = \frac{3m^2}{l^3}\,uu''' + \frac{m^3x}{l^4}\,uu'''' - \frac{m^3x}{l^4}\,u'u'''$$

$$+ \frac{m^2}{l^3}\,u'u'' + \frac{m^3x}{l^4}(u'')^2 - \frac{2m^2}{l^3}\,u'u'' - \frac{m^3x}{l^4}\,u'u''',$$

worin $u'''' = u$, so dass:

---

[1]) Man verdankt diese Methode, wie ich glaube, Poisson.

$$\frac{4m}{l}\int u_m^2\,dx = 3uu'''$$
$$+\frac{mx}{l}u^2 - \frac{2mx}{l}u'u''' - u'u'' + \frac{mx}{l}(u'')^2 \ldots (7).$$

Die rechte Seite ist wieder zwischen Grenzen zu setzen.

Mag nun ein Ende festgeklemmt, gehalten oder frei sein, so ist doch stets:

$$uu''' = 0, \quad u'u'' = 0.$$

Daher ist, wenn wir den Anfang der x an dem einen Ende des Stabes nehmen:

$$\int_0^l u^2\,dx = \left\{\frac{x}{4}(u^2 - 2u'u''' + u''^2)\right\}_0^l$$
$$= \frac{1}{4}l(u^2 - 2u'u''' + u''^2)_{x=l} \ldots (8).$$

Die Gestalt unseres Integrales ist von den Endbedingungen bei $x = 0$ unabhängig. Ist das Ende $x = l$ frei, so verschwinden u'' und u''', und demgemäss ist dann:

$$\int_0^l u^2\,dx = \frac{1}{4}lu^2(l) \quad \ldots\ldots\ldots (9),$$

das heisst für einen Stab mit einem freien Ende ist der mittlere Werth von u^2 ein Viertel des Endwerthes und zwar gleichgültig, ob das andere Ende festgeklemmt, gehalten oder frei ist.

Andererseits verschwinden, wenn der Stab bei $x = l$ festgeklemmt ist, u und u', und es giebt dann (8):

$$\int_0^l u^2\,dx = \frac{1}{4}l[u''(l)]^2.$$

Da dieser Werth immer gelten muss, welches auch die Endbedingungen an dem andern Ende sind, so sehen wir, dass für einen Stab, dessen eines Ende fest und dessen anderes frei ist, gilt:

$$\int_0^l u^2\,dx = \frac{1}{4}lu^2 \text{ (freies Ende)} = \frac{1}{4}lu''^2 \text{ (festes Ende)};$$

ein Beweis dafür, dass in diesem Falle u^2 an dem freien Ende denselben Werth hat, wie u''^2 an dem eingespannten Ende.

Die folgende Tabelle giebt die Werthe des vierfachen Mittels von u^2 in den verschiedenen Fällen

festgeklemmt, frei	u^2 (freies Ende), oder
	u''^2 (festgeklemmtes Ende)
frei, frei	u^2 (freies Ende)
festgeklemmt, festgeklemmt	u''^2 (festgeklemmtes Ende)
gehalten, gehalten	$-2u'u'''$ (gehaltenes Ende) $= 2u'^2$
gehalten, frei	u^2 (freies Ende), oder
	$-2u'u'''$ (gehaltenes Ende)
gehalten, festgeklemmt . .	u''^2 (festgeklemmtes Ende), oder
	$-2u'u'''$ (gehaltenes Ende)

Nach Einführung dieser Werthe nimmt der Ausdruck für T eine einfachere Form an. Zum Beispiel ist bei einem festgeklemmten-freien, oder freien-freien Stab:

$$T = \frac{\varrho l \omega}{8}\{\phi_1^2 u_1^2(l) + \phi_2^2 u_2^2(l) + \cdots\} \ldots (10),$$

wobei das Ende $x = l$ als das freie Ende angenommen ist.

165. Eine ähnliche Methode kann dazu benutzt werden, um die Werthe von $\int u'^2\,dx$, und $\int u''^2\,dx$ aufzusuchen. Bei der Ableitung der Gleichung (7) in dem vorigen Paragraphen wurde nichts vorausgesetzt, als die Richtigkeit der Gleichung $u'''' = u$; da diese Gleichung auch für irgend eine der derivirten Functionen richtig ist, so steht es uns frei, u durch u' oder u'' zu ersetzen. Daher haben wir:

$$\frac{4m}{l}\int_0^l u'^2\,dx = 3u'u + \frac{mx}{l}u'^2 - 2\frac{mx}{l}u''u - u''u''' + \frac{mx}{l}u'''^2$$

$$= 3uu' + \frac{mx}{l}u'^2 - u''u''' + \frac{mx}{l}u'''^2,$$

weil der Werth von $u u''$ in allen drei Fällen verschwindet. Die rechte Seite ist wieder zwischen Grenzen zu nehmen.

Für einen freien-freien Stab ist:

$$\frac{4m}{l}\int_0^l u'^2\,dx = 3(uu')_l - 3(uu')_0 + m(u'^2)_l$$

$$= 6(uu')_l + m(u'^2)_l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

weil, wie wir sehen werden, die Werthe von $u u'$ an den beiden Enden einander gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben müssen. Ob nun u bei $x = l$ positiv oder negativ ist, immer wird $u u'$ positiv sein.

Für einen bei $x = 0$ festgeklemmten und bei $x = l$ freien Stab haben wir:

$$\frac{4m}{l}\int_0^l u'^2\,dx = 3(uu')_l + m u_l'^2 + (u'' u''')_0.$$

Wir sahen schon, dass $u_0'' = u_l$, weiter wird sich aus (§. 173) ergeben, dass $u_0''' = - u_l'$, so dass:

$$\frac{4m}{l}\int_0^l u'^2\,dx = 2(uu')_l + m u_l'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ein Resultat, von dem Gebrauch zu machen wir später Gelegenheit haben werden.

Wenden wir dieselbe Gleichung auf Ermittlung des Werthes von $\int u''^2\,dx$ an, so finden wir:

$$\frac{4m}{l}\int u''^2\,dx = 3\,u''u' + \frac{mx}{l}u''^2 - 2\,\frac{mx}{l}\,u'''u' - u'''u + \frac{mx}{l}\,u^2$$

$$= m(u''^2 - 2\,u'u''' + u^2)_l,$$

da $u'u''$ und uu''' verschwinden.

Vergleichen wir diesen Werth mit Gleichung (8) aus §. 164, so finden wir:

$$\int u''^2 dx = \int u^2 dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

welches auch die Endbedingungen sein mögen.

Dasselbe Resultat kann man directer erhalten durch theilweise Integration der Gleichung:

$$\frac{m^4}{l^4} u^2 = u \frac{d^4 u}{d x^4}.$$

166. Wir können jetzt den Werth für V in Ausdrücken der Normalcoordinaten bilden:

$$V = \frac{b^2 \varkappa^2 \varrho \omega}{2} \int \left\{ \varphi_1 \frac{d^2 u_1}{d x^2} + \varphi_2 \frac{d^2 u_2}{d x^2} + \cdots \right\}^2 d x$$

$$= \frac{b^2 \varkappa^2 \varrho \omega}{2} \left\{ \varphi_1^2 \int \left(\frac{d^2 u_1}{d x^2} \right)^2 d x + \varphi_2^2 \int \left(\frac{d^2 u_2}{d x^2} \right)^2 d x + \cdots \right\}$$

$$= \frac{b^2 \varkappa^2 \varrho \omega}{2 l^4} \left\{ m_1^4 \varphi_1^2 \int u_1^2 d x + m_2^4 \varphi_2^2 \int u_2^2 d x + \cdots \right\} \ldots (1).$$

Sind die Functionen u solche, welche für einen bei $x = l$ freien Stabe gelten, so reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$V = \frac{b^2 \varkappa^2 \varrho \omega}{8 l^3} \left\{ m_1^4 [u_1(l)]^2 \varphi_1^2 + m_2^4 [u_2(l)]^2 \varphi_2^2 + \cdots \right\} \ldots (2).$$

In jedem Falle haben die Bewegungsgleichungen die Form:

$$\varrho \omega \int u_1^2 d x \; \ddot{\varphi}_1 + \frac{b^2 \varkappa^2 \varrho \omega}{l^4} m_1^4 \int u_1^2 d x \; \varphi_1 = \Phi_1 \ldots (3),$$

und da nach der Definition $\Phi_1 \delta \varphi_1$ die von den äusseren Kräften während der Verschiebung $\delta \varphi_1$ geleistete Arbeit ist, so reducirt sich die Gleichung auf:

$$\Phi_1 = \int Y u_1 \varrho \omega d x. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

wenn $Y \varrho \omega d x$ die auf das Element mit der Masse $\varrho \omega d x$ wirkende seitliche Kraft ist. Sind keine äusseren Kräfte vorhanden, so reducirt sich die Gleichung auf:

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{b^2 \varkappa^2 m_1^4}{l^4} \varphi_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

was auch, wie wir wissen, sein muss.

167. Die Bedeutung der Reduction des Integrales $\int u^2 dx$ auf seine Abhängigkeit von den Endwerthen der Function und deren Derivirten wird durch folgende Beweisführung wohl in ein deutlicheres Licht gesetzt. Um unsere Ideen zu fixiren, wollen wir einen bei $x = 0$ festgeklemmten und bei $x = l$ freien Stab ins Auge fassen, der in der durch u ausgedrückten Normalart schwingt. Wird der Stab an dem freien Ende um ein geringes Stück $\triangle l$ verlängert, so ändert sich die Form von u (letzteres als Function von x aufgefasst); indessen dürfen wir nach den allgemeinen in Capitel IV (§. 88) aufgestellten Principien unter den geänderten Umständen die Periode ohne Rücksicht auf eine etwaige Aenderung des Schwingungstypus zu nehmen berechnen, vorausgesetzt, dass wir uns mit einer Annäherung begnügen, bei welcher das Quadrat der Aenderung vernachlässigt wird. Weil der Stab an der Stelle, wo er die Verlängerung erfahren hat, der gerade ist, ändert sich dort die potentielle Energie nicht und deshalb hängt die Aenderung der Tonhöhe ganz von der Veränderung von T ab. Diese Grösse hat zugenommen in dem Verhältniss von:

$$\int_0^l u^2\, dx : \int_0^{l + \triangle l} u^2\, dx,$$

oder

$$1 : 1 + \frac{u_l^2 \triangle l}{\int_0^l u^2\, dx}.$$

In demselben Verhältniss vergrössert sich das Quadrat der Periode. Nun ändert sich, wie wir gleich sehen werden, die wirkliche Periode wie l^2 und daher ändert sich das Quadrat der Periode in dem Verhältniss von

$$1 : 1 + \frac{4 \triangle l}{l}.$$

Eine Vergleichung dieser Verhältnisse zeigt, dass:

$$u_l^2 : \int u^2 dx = 4 : l.$$

Das obige Raisonnement wird nicht als Beweis betrachtet, indessen dient es wenigstens dazu, die Reduction zu erklären, deren das Integral fähig ist. Andere Fälle, in denen solche Integrale auftreten, können in gleicher Weise behandelt werden; manchmal wird man aber darauf achten müssen, mit Gewissheit vorhersagen zu können, welcher Grad von Discontinuität in dem geänderten Typus zulässig ist, ohne aus dem Bereich des Princips zu treten, auf welches der Beweis sich stützt. Der Leser mag, wenn es ihm Recht ist, eine Saite untersuchen, in deren Mitte ein kleines Stück eingesetzt ist.

168. Bei der Behandlung von Schwingungsproblemen ist der gewöhnliche Gang der: zunächst die Form der Normalfunctionen, d. i. der Functionen, welche die Normaltypen darstellen, zu bestimmen und später die Integralformeln zu untersuchen, mittelst deren solche Particularlösungen aufgesucht werden, welche willkürlichen Anfangsumständen genügen. Ich habe vorgezogen, eine hiervon verschiedene Reihenfolge zu verfolgen, um besser die Allgemeinheit der Methode anschaulich zu machen, welche von einer Kenntniss der Normalfunctionen nicht abhängt. In Verfolgung desselben Planes werde ich nun den Zusammenhang der willkürlichen Constanten mit den Anfangsbedingungen aufsuchen, und ein oder zwei Probleme lösen, welche denen analog sind, die in dem Capitel über Saiten behandelt wurden.

Der allgemeine Werth von y kann geschrieben werden:

$$y = \left(A_1 \cos \frac{\varkappa b}{l^2} m_1^2 t + B_1 \sin \frac{\varkappa b}{l^2} m_1^2 t\right) u_1 + \left(A_2 \cos \frac{\varkappa b}{l^2} m_2^2 t + B_2 \sin \frac{\varkappa b}{l^2} m_2^2 t\right) u_2 + \ldots \quad (1),$$

so dass im Anfange:

$$y_0 = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots \quad (2).$$

$$\dot{y}_0 = \frac{\varkappa b}{l^2} (m_1^2 B_1 u_1 + m_2^2 B_2 u_2 + \cdots) \quad (3).$$

Multipliciren wir (2) mit u_r und integriren die Gleichung über die Länge des Stabes, so erhalten wir:

$$\int y_0 u_r\, dx = A_r \int u_r^2\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

und ähnlich aus (3):

$$\frac{l^2}{\varkappa b} \int \dot{y}_0 u_r\, dx = m_r^2 B_r \int u_r^2\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

Formeln, aus denen sich die willkürlichen Constanten bestimmen lassen.

Man muss beachten, dass wir die Möglichkeit der durch (1) ausgedrückten Reihenentwickelung analytisch nicht mehr nachzuweisen haben. Sind alle Particularlösungen eingeschlossen, so stellt (1) nothwendiger Weise die allgemeinste mögliche Schwingung dar; man kann daher (1) auch als Darstellung jedes zulässigen Anfangszustandes annehmen.

Wir wollen nun annehmen, dass der Stab sich ursprünglich in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe befindet und in Bewegung gesetzt wird durch einen Stoss, welcher einem kleinen Theil des Stabes Bewegung mittheilt. Im Anfange, das ist in dem Moment, wo der Stab frei wird, ist $y_0 = 0$ und $\dot{y}_0$ unterscheidet sich von Null nur an den Stellen in der Nachbarschaft eines Punktes ($x = c$).

Aus (4) geht hervor, dass die Coefficienten A verschwinden, und aus (5), dass

$$m_r^2 B_r \int u_r^2\, dx = \frac{l^2}{\varkappa b}\, u_r(c) \int \dot{y}_0\, dx.$$

Nennen wir $\int \dot{y}_0\, \varrho\, \omega\, dx$, d. i. das ganze Bewegungsmoment des Stosses, Y, so haben wir:

$$B_r = \frac{l^2 Y}{\varkappa b \varrho \omega} \frac{u_r(c)}{m_r^2 \int u_r^2\, dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

und für die schliessliche Lösung des Problems:

$$y = \frac{l^2 Y}{\varkappa b \varrho \omega}\left\{ \frac{u_1(c)\, u_1(x)}{m_1^2 \int u_1^2\, dx} \sin\left(\frac{\varkappa b}{l^2} m_1^2 t\right) + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{u_r(c)\, u_r(x)}{m_r^2 \int u_r^2\, dx} \sin\left(\frac{\varkappa b}{l^2} m_r^2 t\right) + \cdots \right\} \ldots (7).$$

Wenden wir dieses Resultat auf einen bei $x = l$ freien Stab an, so können wir:

$$\int u_r^2\, dx \text{ durch } \frac{1}{4}\, l\, [u_r(l)]^2$$

ersetzen.

Wird der Stoss in einem Knotenpunkt einer der Normalcomponenten ertheilt, so ist diese Componente in der resultirenden Bewegung nicht vorhanden. Die gegenwärtige Rechnung ist nur ein specieller Fall der Untersuchung des §. 101.

169. Als ein anderes Beispiel können wir einen Stab nehmen, der anfangs zwar in Ruhe, aber durch eine in $x = c$ wirkende seitliche Kraft aus seiner natürlichen Lage herausgebogen ist. Unter diesen Umständen verschwinden die Coefficienten B; die anderen werden durch Gleichung (4) des §. 168 gegeben.

Nun ist:

$$\int_0^l y_0\, u_r\, dx = \frac{l^4}{m_r^4} \int_0^l y_0 \frac{d^4 u_r}{dx^4}\, dx,$$

und nach theilweiser Integration:

$$\int_0^l y_0 \frac{d^4 u_r}{dx^4}\, dx = y_0 \frac{d^3 u_r}{dx^3} - \frac{d y_0}{dx} \frac{d^2 u_r}{dx^2}$$

$$+ \frac{d^2 y_0}{dx^2} \frac{d u_r}{dx} - \frac{d^3 y_0}{dx^3} u_r + \int_0^l \frac{d^4 y_0}{dx^4} u_r\, dx,$$

in welchem Ausdruck die nicht unter einem Integralzeichen stehenden Glieder zwischen Grenzen zu nehmen sind. Aus

der Natur des Falles folgt, dass y_0 dieselben Endbedingungen erfüllt, wie u_r, und daher verschwinden die eben genannten Glieder bei beiden Grenzen Ist die im Anfange im Elemente dx angebrachte äussere Kraft gleich $Y dx$, so giebt die Gleichgewichtsgleichung des Stabes:

$$\varrho\,\omega\,\varkappa^2 b^2 \frac{d^4 y_0}{d x^4} = Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

und demgemäss:

$$\int_0^l y_0 u_r\,dx = \frac{l^4}{\varrho\,\omega\,\varkappa^2 b^2 m_r^4} \int_0^l Y u_r(x)\,dx.$$

Nehmen wir nun an, dass die Anfangsverschiebung von einer Kraft herrührt, welche in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes $x = c$ angreift, so haben wir:

$$\int_0^l y_0 u_r\,dx = \frac{l^4 u_r(c)}{\varrho\,\omega\,\varkappa^2 b^2 m_r^4} \int Y dx,$$

und für den vollständigen Werth von y zur Zeit t:

$$y = \sum \left\{ \frac{l^4 u_r(c)\, u_r(x)}{m_r^4 \varkappa^2 b^2 \int \varrho\,\omega\,u_r^2\,dx} \cos \frac{\varkappa b}{l^2} m_r^2 t \right\} \int Y dx \ldots (2).$$

Bei der Ableitung des obigen Ausdruckes haben wir über die Bedingungen an den Enden des Stabes bis jetzt noch keine specielle Annahme gemacht. Wenn wir uns auf den Fall eines Stabes beschränken, der bei $x = 0$ festgeklemmt und bei $x = l$ frei ist, so können wir:

$$\int u_r^2\,dx \text{ durch } \frac{1}{4}\, l\,[u_r(l)]^2$$

ersetzen.

Setzen wir weiter voraus, dass die Kraft, welche die anfängliche Biegung bewirkt, am Ende des Stabes angreift, so dass $c = l$, so erhalten wir:

$$y = 4 \sum \left\{ \frac{l^3 u_r(x)}{m_r^4 \varkappa^2 b^2\,\varrho\,\omega\,u_r(l)} \cos \frac{\varkappa b}{l^2} m_r^2 t \right\} \int Y dx \ldots (3).$$

Ist $t = 0$, so muss diese Gleichung die Anfangsverschiebung darstellen. In Fällen dieser Art erhebt sich vielleicht folgende Schwierigkeit: wie ist es möglich, dass die Reihe, aus welcher jedes Glied der Bedindung $y''' = 0$ genügt, eine anfängliche Verschiebung darstellt, welche diese Bedingung verletzt? Die hier zu Grunde liegende Thatsache ist die, dass nach dreifacher Integration in Bezug auf x die Reihe für $x = l$ nicht mehr convergirt, und demgemäss der Werth von y''' sich nicht mehr ergiebt, wenn man die Differentiation zuerst ausführt und dann die einzelnen Glieder addirt. Die Richtigkeit dieses Satzes wird sofort klar, wenn wir einen Punkt ins Auge fassen, der um dl vom Ende entfernt ist und dann:

$$u'''(l - dl) \text{ durch } u'''(l) - u^{IV}(l)\,dl$$

ersetzen, worin $u^{IV}(l)$ gleich ist:

$$\frac{m^4}{l^4}\,u(l).$$

Wegen der Lösung des vorliegenden Problems durch Normalcoordinaten wird der Leser auf §. 101 verwiesen.

170. Die Formen der Normalfunctionen in den verschiedenen Einzelfällen werden dadurch erhalten, dass man die Verhältnisse der vier Constanten in der allgemeinen Lösung von:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{m^4}{l^4}\,u$$

bestimmt.

Schreiben wir der Kürze halber x' für $\frac{mx}{l}$, so kann die Lösung in folgende Form gebracht werden:

$$u = A\,(\cos x' + \cosh x') + B\,(\cos x' - \cosh x') + C\,(\sin x' + \sinh x') + D\,(\sin x' - \sinh x') \quad . . . (1).$$

$\cosh x$ und $\sinh x$ sind die hyperbolischen Cosinusse und Sinusse von x, die durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$\cosh x = \frac{1}{2}\,(e^x + c^{-x}),\quad \sinh x = \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}) \quad . . . (2).$$

Ich bin der gewöhnlichen Bezeichnungsweise gefolgt, obgleich man die Einführung eines speciellen Symbols sehr gut entbehren könnte, da:

$$\cosh x = \cos ix, \quad \sinh x = -i \sin ix \quad . . . \quad (3),$$

worin $i = \sqrt{-1}$. Mit letzterer Schreibweise würde der Zusammenhang zwischen den Formeln der gewöhnlichen ebenen und hyperbolischen Trigonometrie mehr in das Auge fallen. Die Differentiationsregeln sind in folgenden Gleichungen enthalten:

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \cosh x = \cosh x, \quad \frac{d^2}{dx^2} \sinh x = \sinh x.$$

Differentiirt man (1) so oft wie man will, so treten doch immer wieder dieselben vier zusammengesetzten Functionen auf. Die einzige dieser Functionen, welche mit x' nicht verschwindet, ist $\cos x' + \cosh x'$, deren Werth dann 2 beträgt.

Nehmen wir zunächst den Fall, wo beide Enden frei sind. Da $\frac{d^2 u}{dx^2}$ und $\frac{d^3 u}{dx^3}$ mit x verschwinden, so folgt, dass $B = 0$ und $D = 0$, so dass:

$$u = A(\cos x' + \cosh x') + C(\sin x' + \sinh x') . . . \quad (4).$$

Wir haben nun noch den für $x = l$ oder $x' = m$ nothwendigen Bedingungen zu genügen. Diese geben:

$$\left.\begin{aligned} A(-\cos m + \cosh m) + C(-\sin m + \sinh m) &= 0 \\ A(\sin m + \sinh m) + C(-\cos m + \cosh m) &= 0 \end{aligned}\right\} . . . (5),$$

Gleichungen, deren Zusammenbestehen erfordert, dass:

$$(\cosh m - \cos m)^2 = \sinh^2 m - \sin^2 m,$$

oder, kraft der Relation:

$$\cosh^2 m - \sinh^2 m = 1 \quad . . . . \quad (6),$$

$$\cos m \,.\, \cosh m = 1 \quad . . . . \quad (7).$$

Dieses ist die Gleichung, deren Wurzeln die zulässigen Werthe von m geben. Ist (7) erfüllt, so sind die beiden in (5)

gegebenen Verhältnisse von $A : C$ einander gleich; jedes derselben kann in (4) eingesetzt werden. Lassen wir den constanten Factor weg, so haben wir für die Normalfunctionen:

$$u = (\sin m - \sinh m)\left\{\cos\frac{mx}{l} + \cosh\frac{mx}{l}\right\}$$
$$- (\cos m - \cosh m)\left\{\sin\frac{mx}{l} + \sinh\frac{mx}{l}\right\} \quad . . . (8),$$

oder, wenn wir es so vorziehen:

$$u = (\cos m - \cosh m)\left\{\cos\frac{mx}{l} + \cosh\frac{mx}{l}\right\}$$
$$+ (\sin m + \sinh m)\left\{\sin\frac{mx}{l} + \sinh\frac{mx}{l}\right\} \quad . . . (9).$$

Die einfache harmonische Componente dieses Typus wird ausgedrückt durch:

$$y = Pu\cos\left(\frac{\varkappa b}{l^2} m^2 t + \varepsilon\right) \quad . . . . . . (10).$$

171. Die Schwingungszahl der betreffenden Schwingung ist $\frac{\varkappa b}{2\pi l^2} m^2$, worin b eine Geschwindigkeit darstellt, die nur von dem Material abhängt, aus welchem der Stab gebildet ist; m ist eine abstracte Zahl. Daher ändert sich bei einem gegebenen Material und einer gegebenen Schwingungsart die Schwingungszahl direct wie $\varkappa$ — dem Gyrationradius des Querschnittes um eine senkrecht zur Biegungsebene stehende Axe — und umgekehrt wie das Quadrat der Länge. Diese Resultate hätten durch einen auf die Dimensionen gestützten Beweis vorausgesagt werden können, wenn in Betracht gezogen wäre, dass die Schwingungszahl nothwendiger Weise durch die Werthe von l und $\varkappa b$ bestimmt wird — die einzigen, von Raum, Zeit und Masse abhängigen Grössen, welche in der Differentialgleichung auftreten. Ist Alles, was den Stab betrifft, gegeben, abgesehen von der absoluten Grösse, so variirt die Schwingungszahl umgekehrt wie die Lineardimensionen.

Diese Gesetze finden eine wichtige Anwendung bei den Stimmgabeln, deren Zinken wie Stäbe schwingen, welche an denjenigen Enden befestigt, wo jene sich im Stiel vereinigen, und an den anderen Enden frei sind. Daher variiren die Schwingungsperioden der Gabeln von demselben Material und derselben Gestalt wie die Lineardimensionen. Die Periode ist annähernd unabhängig von der Dicke in der zur Biegungsebene senkrechten Richtung, variirt dagegen umgekehrt wie die Dicke in der Biegungsebene. Ist die Dicke gegeben, so ändert sich die Periode wie das Quadrat der Länge.

Um die Tonhöhe einer Stimmgabel zu erniedrigen, können wir für augenblickliche Zwecke die Enden der Zinken mit weichem Wachs belasten, oder das Metall nahe an der Basis der Gabel wegfeilen, wodurch die Federkraft geschwächt wird. Um die Tonhöhe zu steigern, können die Enden der Zinken, welche durch ihr Beharrungsvermögen wirken, abgefeilt werden.

Der Werth von b erreicht sein Maximum beim Stahl, wo er ungefähr 5237 Meter in der Secunde ist. Für Messing ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ungefähr in dem Verhältniss von 1,5 : 1 kleiner, so dass eine aus Messing angefertigte Stimmgabel etwa ein Quinte tiefer ist, wie eine aus Stahl verfertigte von denselben Dimensionen.

172. Für den Fall, dass beide Enden festgeklemmt sind, kann die Lösung unmittelbar aus der vorhergehenden durch eine doppelte Differentiation abgeleitet werden. Da y an beiden Enden den folgenden Endbedingungen genügt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0,$$

so ist klar, dass y'' folgende Gleichungen erfüllt:

$$y'' = 0, \quad \frac{dy''}{dx} = 0,$$

welches die Bedingungen für ein festgeklemmtes Ende sind. Ueberdies wird die allgemeine Differentialgleichung durch y''

auch erfüllt. Daher können wir wie vorher, mit Vernachlässigung eines constanten Factors, nehmen:

$$u = (\sin m - \sinh m)\{\cos x' - \cosh x'\}$$
$$- (\cos m - \cosh m)\{\sin x' - \sinh x'\} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

während m durch dieselbe Gleichung wie vorher, nämlich:

$$\cos m \cosh m = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

gegeben ist. Wir schliessen daraus, dass die Toncomponenten in beiden Fällen dieselbe Höhe haben.

In jedem Falle sind vier Punktsysteme vorhanden, welche durch das Verschwinden von y und dessen Derivirten bestimmt sind. Dort wo y verschwindet, ist ein Knotenpunkt; wo y' verschwindet, ist ein Schwingungsbauch, oder eine Stelle grösster Verschiebung; dort, wo y'' verschwindet, befindet sich ein Inflexionspunkt, und dort, wo y''' gleich Null ist, eine Stelle grösster Krümmung. Wo in dem ersten Fall (frei - frei) Inflexionspunkte und Punkte grösster Krümmung sind, befinden sich in dem zweiten Falle (festgeklemmt - festgeklemmt) resp. Knotenpunkte und Bäuche. *Vice versa* entsprechen die Inflexionspunkte und Punkte grösster Krümmung eines doppelt festgeklemmten Stabes, Knotenpunkten und Bäuchen eines Stabes, dessen Enden frei sind.

173. Wir wollen jetzt die Schwingungen eines bei $x = 0$ festgeklemmten und bei $x = l$ freien Stabes in Betracht ziehen. Greifen wir auf das allgemeine Integral (1) des §. 170 zurück, so sehen wir, dass A und C wegen der Bedingungen bei $x = 0$ verschwinden, so dass:

$$u = B(\cos x' - \cosh x') + D(\sin x' - \sinh x') \quad . \quad . \quad (1).$$

Die bei $x = l$ noch übrigen Bedingungen geben:

$$\left.\begin{aligned} B(\cos m + \cosh m) + D(\sin m + \sinh m) &= 0 \\ B(-\sin m + \sinh m) + D(\cos m + \cosh m) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

woraus wir nach Vernachlässigung des constanten Factors erhalten:

$$u = (\sin m + \sinh m)\left\{\cos\frac{mx}{l} - \cosh\frac{mx}{l}\right\}$$
$$- (\cos m + \cosh m)\left\{\sin\frac{mx}{l} - \sinh\frac{mx}{l}\right\} \quad . \; . \; . \; (2)$$

oder:

$$u = (\cos m + \cosh m)\left\{\cos\frac{mx}{l} - \cosh\frac{mx}{l}\right\}$$
$$+ (\sin m - \sinh m)\left\{\sin\frac{mx}{l} - \sinh\frac{mx}{l}\right\} \quad . \; . \; . \; (3),$$

worin m eine Wurzel von:

$$\cos m \,.\, \cosh m + 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

sein muss. Die Perioden der Toncomponenten sind also in dem vorliegenden Problem verschieden von denen eines Stabes, dessen beide Enden festgeklemmt oder frei sind. Indessen stehen doch die Perioden dieser verschiedenen Fälle, wie wir gleich sehen werden, in naher Beziehung zu einander.

Wird der Werth von u in (2) oder (3) zweimal differentiirt, so erfüllt natürlich das Resultat (u'') die fundamentale Differentialgleichung. Bei $x = 0$ verschwinden $\frac{d^2}{dx^2}u''$ und $\frac{d^3}{dx^3}u''$; bei $x = l$ verschwinden aber u'' und $\frac{d}{dx}u''$. Die Function u'' ist daher anwendbar auf einen Stab, der bei l festgeklemmt und bei 0 frei ist, ein Beweis dafür, dass die Inflexionspunkte und die Punkte grösster Krümmung in der ursprünglichen Curve denselben Abstand von dem festgeklemmten Ende haben, wie respective die Knotenpunkte und Bäuche von dem freien Ende.

174. In Ermangelung von Tabellen für die hyperbolischen Cosinusse oder ihrer Logarithmen können die zulässigen Werthe von m auf folgende Weise berechnet werden. Nehmen wir zuerst die Gleichung:

$$\cos m \cosh m = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

m muss sich offenbar, wenn es gross ist, dem Werthe $\frac{1}{2}(2i + 1)\pi$ nähern, wo i eine ganze Zahl bedeutet. Nehmen wir:

$$m = \frac{1}{2}(2i + 1)\pi - (-1)^i \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

so wird β positiv und vergleichweise klein an Grösse sein.

Setzen wir diesen Werth in (1) ein, so ergiebt sich:

$$cotg \frac{1}{2}\beta = e^m = e^{\frac{1}{2}(2i+1)\pi} e^{-(-1)^i \beta};$$

oder wenn wir $e^{\frac{1}{2}(2i+1)\pi}$ gleich a nehmen:

$$a \, tang \frac{1}{2}\beta = e^{(-)^i \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

eine Gleichung, die durch successive Annäherung gelöst werden kann, nachdem $tang \frac{1}{2}\beta$ und $e^{(-1)^i \beta}$ nach aufsteigenden Potenzen der kleinen Grösse β entwickelt sind. Als Resultat ergiebt sich:

$$\beta = \frac{2}{a} + (-1)^i \frac{4}{a^2} + \frac{34}{3a^3} + (-1)^i \frac{112}{3a^4} + \ldots \quad (4)^{1)},$$

mit hinreichender Genauigkeit, selbst wenn $i = 1$.

Durch Ausrechnung der einzelnen Glieder erhält man:

$$\beta_1 = 0{,}0179666 - 0{,}0003228 + 0{,}0000082 - 0{,}0000002$$
$$= 0{,}0176518.$$

$\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ werden noch einfacher gefunden. Nach β_5 giebt das erste Glied der Reihe β bis auf sechs Stellen genau. Die folgende Tabelle enthält den Werth von β, den Winkel, dessen Bogenmaass β ist, und den Werth von $sin \frac{1}{2}\beta$, der später erforderlich sein wird.

Frei-freier Stab.

	β	β ausgedrückt in Graden, Minuten und Secunden	$sin \frac{1}{2}\beta$
1	$10^{-1} \times 0{,}176518$	1° 0′ 40,94″	$10^{-2} \times 0{,}88258$
2	$10^{-3} \times 0{,}777010$	2′ 40,2699″	$10^{-3} \times 0{,}38850$
3	$10^{-4} \times 0{,}335505$	6,92029″	$10^{-4} \times 0{,}16775$
4	$10^{-5} \times 0{,}144989$	0,299062″	$10^{-6} \times 0{,}72494$
5	$10^{-7} \times 0{,}626556$	0,0129237″	$10^{-7} \times 0{,}31328$

1) Dieser Process ist in etwas dem von Strehlke befolgten ähnlich.

Die Werthe von m, welche (1) genügen, sind:

$$m_1 = 4,7123890 + \beta_1 = 4,7300408$$
$$m_2 = 7,8539816 - \beta_2 = 7,8532046$$
$$m_3 = 10,9955743 + \beta_3 = 10,9956078$$
$$m_4 = 14,1371669 - \beta_4 = 14,1371655$$
$$m_5 = 17,2787596 + \beta_5 = 17,2787596$$

wonach $m = \frac{1}{2}(2i + 1)\pi$ bis auf sieben Decimalstellen genau ist.

Wir wollen nun die Wurzeln der Gleichung:

$$\cos m \cosh m = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ins Auge fassen.

Setzen wir:

$$m = \frac{1}{2}(2i - 1)\pi - (-1)^i\alpha \quad \ldots\ldots \quad (6),$$

so erhalten wir dasselbe Resultat wie vorher:

$$e^m = \cotg \frac{1}{2}\alpha = a' e^{-(-1)^i \alpha},$$

worin indessen:

$$a' = e^{\frac{1}{2}(2i-1)\pi}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Reihe der Werthe von α dieselbe wie die von β ist, wenn auch die entsprechenden Indices nicht dieselben sind. Es ist:

$$\alpha_2 = \beta_1, \quad \alpha_3 = \beta_2, \cdots \alpha_{i+1} = \beta_i \text{ }^{1)}.$$

Wir haben also nur α_1 zu berechnen, wofür indessen die Reihe (4) nicht convergent genug ist. Der Werth von α_1 kann durch Versuche aus der Gleichung:

$$\log \cotg \frac{1}{2}\alpha_1 - 0,6821882 - 0,43429448\,\alpha_1 = 0$$

erhalten werden und findet sich als:

$$\alpha_1 = 0,3043077.$$

---

[1]) Diese Beziehung zwischen α und β scheint bisher noch nicht bemerkt zu sein.

Eine andere Methode, durch welche m_1 direct erhalten werden kann, wollen wir gleich angeben.

Die Werthe von m, die (5) genügen, sind:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1{,}5707963 + \alpha_1 = 1{,}875104 \\ m_2 &= 4{,}7123890 - \alpha_2 = 4{,}694737 \\ m_3 &= 7{,}8539816 + \alpha_3 = 7{,}854758 \\ m_4 &= 10{,}9955743 - \alpha_4 = 10{,}995541 \\ m_5 &= 14{,}1371669 + \alpha_5 = 14{,}137168 \\ m_6 &= 17{,}2787596 - \alpha_6 = 17{,}278759. \end{aligned}$$

Hiernach ist m fast genau $= \frac{1}{2}(2i - 1)\pi$. Die Schwingungszahlen sind proportional m^2 und stehen also für die höheren Töne nahezu in demselben Verhältnisse wie die Quadrate der ungeraden Zahlen. Indessen kann bei den Obertönen sehr hoher Ordnung die Tonhöhe durch die Rotationsträgheit, deren Wirkung hier vernachlässigt werden darf, ein wenig gestört werden.

175. Da die Schwingungscomponenten eines Systems, welches der Zerstreuung nicht ausgesetzt ist, nothwendiger Weise einen harmonischen Typus haben, so müssen alle Werthe von m^2, welche der Gleichung:

$$\cos m \cosh m = \pm 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügen, reell sein. Wir sehen weiter, dass, wenn m eine Wurzel ist, dann auch $-m$, $m\sqrt{-1}$, $-m\sqrt{-1}$ Wurzeln sind. Daher haben wir, wenn wir zuerst das untere Zeichen nehmen:

$$\frac{1}{2}(\cos m \cosh m + 1) = 1 - \frac{m^4}{12} + \frac{m^8}{12{,}35^2} - \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{m^4}{m_1{}^4}\right)\left(1 - \frac{m^4}{m_2{}^4}\right) \text{ etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus, entwickeln, und setzen die Coefficienten einander gleich, so haben wir:

$$\sum \frac{1}{m^4} = \frac{1}{12}; \quad \sum \frac{1}{m^8} = \frac{1}{12^2} \cdot \frac{33}{35}; \text{ etc. . . . } (3).$$

Das gilt für einen festgeklemmten-freien Stab.

Von diesem also bekannten Werth von $\Sigma\, m^{-8}$ kann der Werth von m_1 abgeleitet werden mit Hülfe der angenäherten Werthe von $m_2, m_3 \ldots$. Wir finden:

$$\Sigma m^{-8} = 0{,}006547621$$

und

$$m_2^{-8} = 0{,}000004237$$
$$m_3^{-8} = 0{,}000000069$$
$$m_4^{-8} = 0{,}000000005,$$

woraus

$$m_1^{-8} = 0{,}006543310,$$

was

$$m_1 = 0{,}1875105 \text{ giebt, wie vorher.}$$

Auf gleiche Weise haben wir, wenn beide Enden des Stabes festgeklemmt oder frei sind:

$$1 - \frac{m^4}{12{,}35} + \cdots = \left(1 - \frac{m^4}{m_1^4}\right)\left(1 - \frac{m^4}{m_2^4}\right) \text{ etc.. . . } (4),$$

woraus: $\sum \frac{1}{m^4} = \frac{1}{12{,}35}$ etc.; natürlich ist hier bei der Summation die Null als Werth von m ausgeschlossen.

176. Die Schwingungszahlen der Tonreihe sind proportional m^2. Das Intervall zwischen irgend einem Ton und dem tiefsten der Reihe kann zweckmässig in Octaven und Bruchtheilen einer Octave ausgedrückt werden. Dieses erreicht man dadurch, dass man die Differenz der Logarithmen von m^2 durch den Logarithmus von 2 dividirt. Die Resultate sind folgende:

1,4629	2,6478
2,4358	4,1332
3,1590	5,1036
3,7382 etc.	5,8288 etc.

Hier bezieht sich die erste Columne auf die Töne eines Stabes, dessen beide Enden festgeklemmt oder frei sind; und die

zweite Columne auf einen Stab, dessen eines Ende festgeklemmt, während das andere frei ist. Aus der zweiten Columne ergiebt sich also, dass der erste Oberton um 2,6478 Octaven höher als der tiefste Ton ist. Der Bruchtheil kann auf mittlere halbe Töne durch Multiplication mit 12 reducirt werden. Das obige Intervall ist darnach gleich zwei Octaven + 7,7736 mittleren Halbtönen. Man bemerkt wohl, dass das Ansteigen der Tonhöhe viel rascher erfolgt, wie bei den Saiten.

Ist ein Stab an einem Ende festgeklemmt und an dem andern Ende frei, so ist die Tonhöhe des tiefsten Tones gleich $2\,(\log 4{,}7300 - \log 1{,}8751) : \log 2$ oder um 2,6698 Octaven tiefer, als wenn beide Enden eingeklemmt oder beide frei wären.

177. Um die Curve, in welcher der Stab schwingt, näher zu untersuchen, wollen wir den Ausdruck für u in eine Form transformiren, die für numerische Berechnung zweckmässiger ist, indem wir zuerst den Fall vornehmen, wo beide Enden frei sind. Da $m = \frac{1}{2}(2i+1)\pi - (-1)^i\beta$, so ist $\cos m = \sin\beta$ und $\sin m = \cos i\pi \times \cos\beta$; daher ist, wenn m eine Wurzel von $\cos m \cosh m = 1$ ist, $\cosh m = \operatorname{cosec}\beta$.

Demnach haben wir:

$$\sinh^2 m = \cosh^2 m - 1 = \operatorname{tang}^2 m = \cot^2\beta,$$

oder, da $\cot\beta$ positiv ist:

$$\sinh m = \cot\beta.$$

Daher:

$$\frac{\sin m - \sinh m}{\cos m - \cosh m} = \frac{1 - \cos i\pi \sin\beta}{\cos\beta}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{1}{2}\beta - \cos i\pi \sin\frac{1}{2}\beta\right)^2}{\left(\cos\frac{1}{2}\beta - \cos i\pi \sin\frac{1}{2}\beta\right)\left(\cos\frac{1}{2}\beta + \cos i\pi \sin\frac{1}{2}\beta\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\beta \cos i\pi - \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta \cos i\pi + \sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Wir können daher für u mit Vernachlässigung des constanten Factors setzen:

$$u = \left(\cos\frac{1}{2}\beta\cos i\pi + \sin\frac{1}{2}\beta\right)\left\{\sin\frac{mx}{l} + \sinh\frac{mx}{l}\right\}$$

$$-\left(\cos\frac{1}{2}\beta\cos i\pi - \sin\frac{1}{2}\beta\right)\left\{\cos\frac{mx}{l} + \cosh\frac{mx}{l}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\cos i\pi\sin\left\{\frac{mx}{l} - \frac{\pi}{4} + (-1)^i\frac{\beta}{2}\right\}$$

$$+ \sin\frac{1}{2}\beta e^{\frac{mx}{l}} - \cos i\pi\cos\frac{1}{2}\beta e^{-\frac{mx}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Ziehen wir weiter den Factor $\sqrt{2}$ heraus und setzen $l = 1$, so können wir setzen:

$$u = F_1 + F_2 + F_3,$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \cos i\pi\sin\left\{mx - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(-1)^i\beta\right\} \\ \log F_2 &= \quad mx\log e + \log\sin\frac{1}{2}\beta - \log\sqrt{2} \\ \log \pm F_3 &= -mx\log e + \log\cos\frac{1}{2}\beta - \log\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2).$$

Hieraus kann u für verschiedene Werthe von i und x berechnet werden.

Im Mittelpunkte des Stabes ist $x = \frac{1}{2}$ und ausserdem sind dort F_2 und F_3 numerisch einander gleich wegen $e^m = \cot g\frac{1}{2}\beta$. Wenn i gerade ist, so fallen diese Glieder aus. Für F_1 haben wir nämlich $F_1 = (-1)^i\sin\frac{1}{2}i\pi$, welches gleich Null ist, wenn i gerade, und $= \pm 1$, wenn i ungerade. Ist i gerade, so verschwindet daher die Summe der drei Glieder und es befindet sich demgemäss im Mittelpunkt ein Knotenpunkt.

Ist $x = 0$, so reducirt sich u auf: $-2(-1)^i\sin\left\{\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}(-1)^i\beta\right\}$, welches, da β immer klein ist, zeigt, dass am Ende für keinen

Werth von i ein Knotenpunkt liegt. Wenn man einen langen Stahlstab (der z. B. in der Mitte festgehalten wird) sanft mit einem Hammer schlägt, während verschiedene Punkte auf der Länge des Stabes nach einander mit dem Finger berührt werden, so wird man eine ungewöhnliche Schwäche des Klanges bemerken, wenn man nahe an das Ende herankommt.

178. Wir wollen jetzt einige einzelne Fälle vornehmen:

Schwingung mit zwei Knotenpunkten. $i = 1$.

Ist $i = 1$, so ist die Schwingung die tiefste, welche der Stab annehmen kann.

Unsere Formeln werden:

$$F_1 = -\sin\{x(270^0 + 1^0\,0'\,40{,}94'') - 45^0 - 30'\,20{,}47''\}$$
$$\log F_2 = \quad 2{,}054231\,x + \bar{3}{,}7952391$$
$$\log F_3 = -\,2{,}054231\,x + \bar{1}{,}8494681,$$

woraus die folgende Tabelle berechnet ist, welche die Werthe von u für x gleich 0,00, 0,05, 0,10 etc. giebt.

Die Werthe von $u : u$ (0,5) für die zwischenliegenden Werthe von x (in der letzten Columne) sind mittelst Interpolationsformeln gefunden. Sind o, p, q, r, s, t sechs auf einander folgende Glieder, so ist das zwischen q und r liegende:

$$\frac{q+r}{2} + \frac{q+r-(p+s)}{4^2}$$
$$+ \frac{3}{4^4}\Big\{2\,[q+r-(p+s)] - (p+s) + o + t\Big\}.$$

x	F_1	F_2	F_3	u	$u : u$ (0,5)
0,000	+ 0,7133200	+ 0,0062408	+ 0,7070793	+ 1,4266401	+ 1,645219
0,025	...	...	...	...	1,454176
0,050	0,5292548	0,0079059	0,5581572	1,0953179	1,263134
0,075	...	...	...	...	1,072162
0,100	0,3157243	0,0100153	0,4406005	0,7663401	0,8837528
0,125	...	...	...	...	0,6969004
0,150	+ 0,0846166	0,0126874	0,3478031	0,4451071	0,5133028
0,175	...	...	...	...	0,3341625
0,200	— 0,1512020	0,0160726	0,2745503	+ 0,1394209	+ 0,1607819
0,225	...	...	...	...	— 0,0054711
0,250	0,3786027	0,0203609	0,2167256	— 0,1415162	0,1631982
0,275	...	...	...	...	0,3109982
0,300	0,5849255	0,0257934	0,1710798	0,3880523	0,4475066
0,325	...	...	...	...	0,5714137
0,350	0,7586838	0,0326753	0,1350477	0,5909608	0,6815032
0,375	...	...	...	...	0,7766629
0,400	0,8902038	0,0413934	0,1066045	0,7422059	0,8559210
0,425	...	...	...	...	0,9184491
0,450	0,9721635	0,0524376	0,0841519	0,8355740	0,9635940
0,475	...	...	...	...	0,9908730
0,500	— 1,000000	+ 0,0664285	0,0664282	— 0,8671433	— 1,0000000

Da die Schwingungscurve mit Rücksicht auf den Mittelpunkt des Stabes symmetrisch ist, so ist es nicht nöthig, die

Fig. 28.

Tabelle über $x = 0,5$ hinaus fortzusetzen. Die Curve selbst ist in Fig. 28 gezeichnet.

Um die Lage des Knotenpunktes zu finden, haben wir durch Interpolation:

$$x = 0{,}200 + \frac{0{,}1607819}{0{,}1662530} \times 0{,}025 = 0{,}22418.$$

Es ist dieses der Bruchtheil der ganzen Länge, um welchen der Knotenpunkt von dem nächsten Stabende entfernt ist.

Schwingung mit drei Knotenpunkten $i = 2$.

$$F_1 = \sin\{(450^0 - 2'40{,}27'')\,x - 45^0 + 1'\,20{,}135''\}$$
$$\log F_2 = \quad 3{,}410604\,x + \bar{4}{,}4388816$$
$$\log(-F_3) = -\,3{,}410604\,x + \bar{1}{,}8494850.$$

x	$u : -u\,(0)$	x	$u : -u\,(0)$
0,000	— 1,0000	0,250	+ 0,5847
0,025	0,8040	0,275	0,6374
0,050	0,6079	0,300	0,6620
0,075	0,4147	0,325	0,6569
0,100	0,2274	0,350	0,6245
0,125	— 0,0487	0,375	0,5652
0,150	+ 0,1175	0,400	0,4830
0,175	0,2672	0,425	0,3805
0,200	0,3972	0,450	0,2627
0,225	0,5037	0,475	0,1340
		0,500	0,0000

In dieser Tabelle sind, wie vorher, die Werthe von u direct für $x = 0{,}000,\ 0{,}050,\ 0{,}100$ etc. berechnet und für die dazwischen liegenden Werthe interpolirt worden. Für die Lage des Knotenpunktes giebt die Tabelle durch gewöhnliche Interpolation: $x = 0{,}132$. Berechnen wir diese Lage nach der obigen Interpolationsformel, so finden wir:

$$u\,(0{,}1321) = -\,0{,}000076,$$
$$u\,(0{,}1322) = +\,0{,}000881,$$

woraus $x = 0{,}132108$, in Uebereinstimmung mit dem von Strehlke erhaltenen Resultat. Der Ort des grössten Ausschlages kann aus der derivirten Function gefunden werden. Wir erhalten:

$$u'(0{,}3083) = +\ 0{,}0006077,\quad u'(0{,}3084) = -\ 0{,}000227,$$

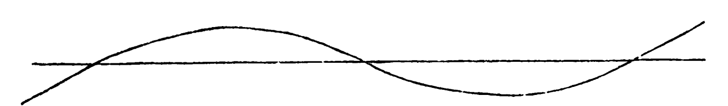
woraus:

$$u'(0{,}308373) = 0.$$

Daher ist u ein Maximum, wenn $x = 0{,}308373$. Es erreicht dann u den Werth 0,6636, der, wie bemerkt werden muss, viel geringer wie die Excursion am Ende ist.

Die Schwingungscurve ist in Fig. 29 gezeichnet.

Fig. 29.



Schwingung mit vier Knotenpunkten. $i = 3$.

$$F_1 = -\sin\{(630^0 + 6{,}92'')\,x - 45^0 - 3{,}46''\},$$
$$\log F_2 = \quad 4{,}775332\,x + \bar{5}{,}0741527,$$
$$\log F_3 = -\ 4{,}775332\,x + \bar{1}{,}8494850.$$

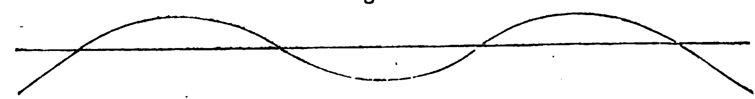
Hieraus ergiebt sich $u(0) = 1{,}41424$, $u(\frac{1}{2}) = 1{,}00579$. Die Lage der Knotenpunkte wird durch Versuchen leicht erhalten. So ist:

$$u(0{,}3558) = -\ 0{,}000037,\quad u(0{,}3559) = +\ 0{,}001047,$$

woraus $u(0{,}355803) = 0$. Der Werth von x für den nahe am Ende liegenden Knotenpunkt ist 0,0944 (Seebeck).

Die Lage des Schwingungsbauches wird am besten aus der derivirten Function gefunden. Es ergiebt sich, dass $u' = 0$, wenn $x = 0{,}2200$, und dann ist $u = -\ 0{,}9349$. Es befindet

Fig. 30.



sich ebenso im Mittelpunkte ein Bauch; indessen ist hier der Ausschlag nicht so gross, wie an den beiden anderen Stellen.

Wir sahen, dass im Mittelpunkte des Stabes F_2 und F_3 numerisch einander gleich sind. In der Nähe der Mitte ist F_3 augenscheinlich sehr klein, wenn i mässig gross ist; daher reducirt sich die Gleichung für die Knotenpunkte annähernd auf:

$$\frac{mx}{l} - \frac{\pi}{4} + (-1)^i \frac{\beta}{2} = \pm n\pi,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Verlegen wir den Anfangspunkt in den Mittelpunkt des Stabes, und ersetzen wir m durch seinen Näherungswerth $\frac{1}{2}(2i+1)\pi$, so finden wir:

$$\frac{x}{l} = \frac{\pm 2n - i}{2i+1};$$

die Formel zeigt, dass nahe dem Mittelpunkte des Stabes die Knotenpunkte gleichmässig vertheilt sind; das Intervall zwischen auf einander folgenden Knotenpunkten ist $2l:(2i+1)$. Dieses theoretische Resultat wurde durch die Messungen von Strehlke und Lissajous bestätigt.

In Betreff der Annäherungsmethoden, die auf Knotenpunkte nahe den Enden anwendbar sind, wenn i grösser als 3 ist, verweise ich den Leser auf die schon in §. 160 erwähnte Arbeit von Seebeck und auf Donkin's Akustik (S. 194).

179. Die Berechnungen werden sehr einfach für einen am einen Ende festgeklemmten und am andern Ende freien Stab. Ist $u \propto F$, und $F = F_1 + F_2 + F_3$, so haben wir allgemein:

$$F_1 = \cos\left\{mx + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(-1)^i\alpha\right\},$$

$$F_2 = \frac{(-1)^i}{\sqrt{2}} \sin\frac{1}{2}\alpha\, e^{mx}; \quad F_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{2}\alpha\, e^{-mx}.$$

Ist $i = 1$, so erhalten wir für die Berechnung der tiefsten Schwingungscurve:

$$F_1 = \cos\left\{\frac{180}{\pi} mx^0 + 45^0 - 8^0\, 43{,}0665'\right\},$$

$$\log(-F_2) = \quad mx \log e + \bar{1}{,}0300909,$$

$$\log(-F_3) = -\, mx \log e + \bar{1}{,}8444383.$$

Diese Werthe geben Folgendes:

$F(\ 0) = 0{,}000000$, $\quad F(0{,}6) = 0{,}743452$,

$F(0{,}2) = 0{,}102974$, $\quad F(0{,}8) = 1{,}169632$,

$F(0{,}4) = 0{,}370625$, $\quad F(1{,}0) = 1{,}612224$,

woraus Fig. 31 construirt ist.

Fig. 31.

Die Abstände der Knotenpunkte von dem freien Ende bei einem am andern Ende festgeklemmten Stabe sind von Seebeck und Donkin angegeben zu:

2ter Ton 0,2261,

3ter Ton 0,1321, 0,4999,

4ter Ton 0,0944, 0,3558, 0,6439,

$$i^{ter}\ \text{Ton}\ \frac{1{,}3222}{4i-2},\ \frac{4{,}9820}{4i-2},\ \frac{9{,}0007}{4i-2},\ \frac{4j-3}{4i-2},\ \frac{4i-10{,}9993}{4i-2},\ \frac{4i-7{,}0175}{4i-2}.$$

„Die letzte Reihe in dieser Tabelle muss so aufgefasst werden, dass $\frac{4j-3}{4i-2}$ den Abstand des $j$ten Knotenpunktes von dem freien Ende bedeutet, mit Ausnahme der drei ersten und der zwei letzten Knotenpunkte.“

Sind beide Enden frei, so ist der Abstand der Knotenpunkte von dem nächsten Ende:

1ter Ton 0,2242,

2ter Ton 0,1321, 0,5,

3ter Ton 0,0944, 0,3558,

$$i^{ter}\ \text{Ton}\ \frac{1{,}3222}{4i+2},\ \frac{4{,}9820}{4i+2},\ \frac{9{,}0007}{4i+2},\ \frac{4j-3}{4i+2}.$$

Die Inflexionspunkte für einen frei-freien Stab (welche den Knotenpunkten eines festgeklemmt-festgeklemmten Stabes entsprechen) hat Seebeck gleichfalls angegeben:

	1ter Punkt	2ter Punkt	$\varkappa$ter Punkt
1ter Ton	Kein Inflexionspunkt		
2ter Ton	0,5000		
3ter Ton	0,3593		
iter Ton	$\frac{5{,}0175}{4i+2}$	$\frac{8{,}9993}{4i+2}$	$\frac{4\varkappa+1}{4i+2}$

Mit Ausnahme der äussersten Knotenpunkte (welche keinen entsprechenden Inflexionspunkt haben) treten Knotenpunkte und Inflexionspunkte stets sehr nahe bei einander auf.

180. Der Fall, wo das eine Ende eines Stabes frei ist und das andere gehalten wird, braucht nicht besonders untersucht zu werden, da derselbe auf den Fall eines Stabes mit zwei freien Enden, der in einer geraden Art schwingt, d. i. mit einem Knotenpunkt in der Mitte, zurückgeführt werden kann. Denn in dem mittelsten Knotenpunkte verschwinden y und y'', und das sind gerade die Zustandsbedingungen für ein gehaltenes Ende. Auf gleiche Weise sind die Schwingungen eines festgeklemmten-gehaltenen Stabes dieselben wie die der einen Hälfte eines Stabes, dessen beide Enden festgeklemmt sind und der mit einem Knotenpunkt in der Mitte schwingt.

181. Die letzte von den sechs Combinationen in Bezug auf die Endbedingungen ist die, wo beide Enden unterstützt sind. Mit Rücksicht auf (1) §. 170 sehen wir, dass die Bedingungen bei $x = 0$ ergeben: $A = 0$, $B = 0$, so dass:

$$u = (C + D)\sin x' + (C - D)\sinh x'.$$

Da u und u'' verschwinden, wenn $x' = m$, so ist $C - D = 0$ und $\sin m = 0$.

Daher lautet die Lösung:

$$y = \sin\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i^2\pi^2\varkappa b}{l^2}t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wo i eine ganze Zahl ist. Natürlich kann ein beliebiger constanter Factor vorgesetzt und zu t eine Constante hinzugefügt werden.

Die Normalcurven sind, wie sich hieraus ergiebt, dieselben, wie die bei einer Saite, welche zwischen zwei festen Punkten ausgespannt ist; indessen ist die Reihenfolge der Töne eine vollständig verschiedene, da die Schwingungszahlen sich mit dem Quadrate von i ändern. Die Knotenpunkte und Inflexionspunkte fallen zusammen; die Bäuche (welche zugleich die Punkte grösster Krümmung sind) halbiren den Abstand zwischen den Knotenpunkten.

182. Die Theorie des schwingenden Stabes kann verwandt werden zur Illustration des allgemeinen Princips, dass die natürlichen Perioden eines Systems die Maximum- oder Minimum-Bedingungen erfüllen und dass die grösste der natürlichen Perioden jede andere an Grösse überwiegt, welche durch Veränderung des Typus erhalten werden kann. Wir wollen annehmen, die Schwingungscurve eines festgeklemmt-freien Stabes sei dieselbe, in welche der Stab von selbst übergehen würde, wenn er durch eine an seinem freien Ende angreifende Kraft verbogen wäre. Als Gleichung dieser Curve kann genommen werden:

$$y = -3lx^2 + x^3,$$

welche der Bedingung $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$ an allen Stellen genügt, und y und y' bei $x = 0$, dagegen y'' bei l verschwinden lässt. Also ist, wenn die Gestalt des Stabes zur Zeit t durch:

$$y = (-3lx^2 + x^3) \cos pt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben wird, die potentielle Energie nach (1) §. 161 gleich $6\, q\varkappa^2 \omega l^3 \cos^2 pt$, während die kinetische Energie gleich $\frac{33}{70} \varrho \omega l^7 p^2 \sin^2 pt$ ist. Daraus folgt: $p^2 = \frac{140}{11} \frac{\varkappa^2 b^2}{l^4}$. Nun ist p_1 (der wahre Werth von p für den tiefsten Ton) gleich:

$$\frac{\varkappa b}{l^2} \times (1{,}8751)^2,$$

so dass:

$$p_1 : p = (1,8751)^2 \sqrt{\frac{11}{140}} = 0,98556.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die wirkliche Höhe des tiefsten Tones etwas niedriger (wenn auch verhältnissmässig wenig) ist, als die aus dem hypothetischen Typus berechnete. Wir haben zu bemerken, dass der in Frage stehende hypothetische Typus die Endbedingung $y''' = 0$ verletzt. Dieser Umstand hat indessen mit der Anwendung des Princips nichts zu thun, denn der angenommene Typus kann ein beliebiger von allen denen sein, welche als Anfangsconfiguration zulässig sind; der Umstand hat aber die Bedeutung, dass dadurch eine sehr nahe Uebereinstimmung der Perioden vermieden wird.

Wir können eine bessere Annäherung erwarten, wenn wir unsere Berechnung auf die Curve gründen, in welche der Stab durch eine Kraft gebogen wird, die in einem etwas vom freien Ende entfernten Punkte angreift, so dass zwischen diesem Punkte ($x = c$) und dem freien Ende der Stab gerade sein wird und daher ohne potentielle Energie. Daher ist die potentielle Energie des ganzen Stabes $= 6\,q\varkappa^2\omega c^3 cos^2 pt$.

Die kinetische Energie kann aus dem Werthe von y leicht durch Integration gefunden werden.

Von 0 bis c ist:

$$y = -3\,cx^2 + x^3,$$

und von c bis l:

$$y = c^2\,(c - 3\,x).$$

Dieser Werth kann leicht aus dem Umstand gefolgert werden, dass y und y' bei $x = c$ nicht plötzlich ihr Zeichen ändern dürfen. Das Resultat lautet:

$$\text{kinetische Energie} = \varrho\,\omega p^2 sin^2 pt \left[\frac{33}{70} c^7 + \frac{1}{2} c^4 (l - c)(c^2 + 3\,l^2)\right],$$

woraus:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{6\,\varkappa^2 b^2}\left[\frac{33}{70} c^4 + \frac{c}{2}(l - c)(c^2 + 3\,l^2)\right] \ldots (2).$$

Der Maximalwerth von $1 : p^2$ tritt ein, wenn der Angriffspunkt der Kraft nahe bei dem Knotenpunkte der zweiten

Normal-Schwingungscomponente liegt. Setzen wir $c = \frac{3}{4} l$, so erhalten wir ein Resultat, welches in der musikalischen Scala zu hoch ist und zwar um das durch das Verhältniss 1 : 0,9977 gegebene Intervall; demnach kommt das Resultat der Wirklichkeit sehr nahe. Dieses Beispiel kann uns eine Idee davon geben, wie nahe richtig die Periode eines schwingenden Systems durch einfache Mittel ohne Lösung von Differential- oder transcendenten Gleichungen berechnet werden kann.

Die eben betrachtete Schwingungsart ist die, welche ein Stab wirklich einnehmen würde, wenn er selbst ohne Trägheit wäre, aber an seinem freien Ende ein Gewicht M trüge, vorausgesetzt, dass die Rotationsträgheit von M vernachlässigt werden könnte. Wir würden dann in der That haben:

$$V = 6\, q \varkappa^2 \omega l^3 \cos^2 pt, \quad T = 2\, M l^6 p^2 \sin^2 pt,$$

so dass:

$$p^2 = \frac{3\, q \varkappa^2 \omega}{M l^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Selbst wenn die Trägheit des Stabes im Verhältniss zu M nicht ganz zu vernachlässigen ist, so können wir doch noch denselben Typus als Basis einer angenäherten Rechnung nehmen:

$$V = 6\, q \varkappa^2 \omega l^3 \cos^2 pt,$$

$$T = \left(2\, M l^6 + \frac{33}{70}\, \varrho\, \omega l^7\right) p^2 \sin^2 pt,$$

woraus:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{l^3}{3\, q \varkappa^2 \omega}\left(M + \frac{33}{140}\, \varrho\, \omega\, l\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

d. h. M muss um ungefähr ein Viertel der Masse des Stabes vergrössert werden. Da das Resultat genau ist, wenn M gleich unendlich, und da es, selbst wenn $M = 0$, nicht viel von der Wirklichkeit abweicht, so kann man sagen, dass es im Allgemeinen als Annäherung anwendbar ist. Der Fehler wird stets der Art sein, dass die Tonhöhe sich zu hoch ergiebt.

183. Die Vernachlässigung der Rotationsträgheit von M kann indessen unter den gewöhnlichen Versuchsbedingungen nicht gerechtfertigt erscheinen. Es ist leicht, sich einen Fall

vorzustellen (wenn auch nicht denselben auszuführen), wo die Verschiebungsträgheit im Vergleich zu der Rotationsträgheit vernachlässigt werden kann; das wäre dann das entgegengesetzte Extrem von dem vorher betrachteten Falle. Sind beide Arten von Trägheit in der Masse M eingeschlossen, so besitzt das System, selbst wenn die Trägheit des Stabes ganz vernachlässigt wird, zwei von einander verschiedene und unabhängige Schwingungsperioden.

Es mögen z und ϑ die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ bei $x = l$ bezeichnen. Die Gleichung der Curve des Stabes ist dann:

$$y = \frac{3z - l\vartheta}{l^2} x^2 + \frac{l\vartheta - 2z}{l^3} x^3,$$

und:

$$V = \frac{2q\varkappa^2\omega}{l^3} \{3z^2 - 3zl\vartheta + l^2\vartheta^2\} \quad . \; . \; . \quad (1),$$

während wir für die kinetische Energie haben:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{z}^2 + \frac{1}{2} M\varkappa'^2\dot{\vartheta}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

$\varkappa'$ ist der Gyrationsradius von M um eine senkrecht zur Schwingungsebene stehende Axe.

Die Bewegungsgleichungen lauten demnach:

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{z} + \frac{2q\varkappa^2\omega}{l^3} (6z - 3l\vartheta) = 0 \\ M\varkappa'^2\ddot{\vartheta} + \frac{2q\varkappa^2\omega}{l^3} (-3lz + 2l^2\vartheta) = 0 \end{aligned}\right\} \; . \; . \quad (3),$$

woraus wir, wenn z und ϑ sich wie $\cos pt$ ändern, erhalten:

$$p^2 = \frac{2q\varkappa^2\omega}{Ml\varkappa'^2} \left\{1 + \frac{3\varkappa'^2}{l^2} \pm \sqrt{1 + \frac{3\varkappa'^2}{l^2} + \frac{9\varkappa'^4}{l^4}}\right\} \; . \; . \; . \quad (4),$$

entsprechend den beiden Perioden, welche stets von einander verschieden sind.

Vernachlässigen wir die Rotationsträgheit, indem wir $\varkappa' = 0$ setzen, so kommen wir auf unser früheres Resultat:

$$p^2 = \frac{3q\varkappa^2\omega}{Ml^3}$$

zurück. Der andere Werth von p^2 ist dann unendlich.

Ist $\varkappa' : l$ nur klein, so dass die höheren Potenzen vernachlässigt werden können, so ist:

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{4 q \varkappa^2 \omega}{M l \varkappa'^2}\left(1 + \frac{9}{4}\frac{\varkappa'^2}{l^2}\right) \\ p^2 &= \frac{3 q \varkappa^2 \omega}{M l^3}\left(1 - \frac{9}{4}\frac{\varkappa'^2}{l^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Ist auf der andern Seite $\varkappa'^2$ sehr gross, so dass Rotation verhütet wird, so ist:

$$p^2 = \frac{12 q \varkappa^2 \omega}{M l^3} \text{ oder } \frac{q \varkappa^2 \omega}{M l \varkappa'^2} \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Der letztere Werth ist sehr klein. Es ergiebt sich aus Obigem, dass wenn Rotation verhindert ist, die Tonhöhe um eine Octave höher ist, als wenn überhaupt keine Rotationsträgheit vorhanden wäre. Diese Schlüsse könnten eben so direct aus den Differentialgleichungen gefolgert werden; denn wenn $\varkappa' = \infty$, ist $\vartheta = 0$, und dann:

$$M\ddot{z} + \frac{12 q \varkappa^2 \omega}{l^3} z = 0.$$

Ist dagegen $\varkappa' = 0$, so ist nach der zweiten der Gleichungen (3) $\vartheta = \frac{3}{2l} z$ und in diesem Falle:

$$M\ddot{z} + \frac{3 q \varkappa^2 \omega}{l^3} z = 0.$$

184. Wird einem Stabe an einem Ende etwas hinzugefügt, so wird die Schwingungsperiode verlängert. Ist das fragliche Ende frei, so wollen wir zunächst annehmen, dass das hinzugefügte Stück keine Trägheit besitzt. Da dann weder in der potentiellen noch in der kinetischen Energie eine Aenderung eintreten würde, so bliebe die Tonhöhe unverändert; in dem Verhältnisse aber, wie das hinzugefügte Stück Trägheit annimmt, fällt die Tonhöhe (§. 88).

Auf dieselbe Weise würde eine kleine Verlängerung eines Stabes über ein festgeklemmtes Ende hinaus ohne Wirkung sein, da diese Verlängerung keine Bewegung annehmen würde. Gleichfalls wird keine Aenderung eintreten, wenn das neue

Ende auch festgeklemmt wird; wird hingegen die erste Festklemmung gelockert, so fällt der Ton in Folge der Verringerung an der potentiellen Energie einer gegebenen Deformation.

Der Fall eines „gehaltenen“ Endes ist nicht ganz so einfach. Es sei das ursprüngliche Ende des Stabes A, das angefügte Stück, das wir zunächst ohne Trägheit annehmen wollen, sei AB. Im Anfange möge das Ende A befestigt oder gehalten werden, wenn wir es lieber so auffassen wollen, durch eine Feder von unendlich grosser Steifheit. Wir wollen annehmen, diese Feder, welche keine Trägheit besitzt, werde allmälig abgespannt. Während dieses Vorganges nimmt die Bewegung des neuen Endes B ab, und bei einem gewissen Grade der Abspannung kommt B zur Ruhe. Die Tonhöhe fällt dabei. B, welches nun in Ruhe ist, kann als fest geworden angesehen werden; die Wegnahme der Feder bei A zieht ein weiteres Fallen in der Tonhöhe nach sich, welches noch verstärkt wird, wenn AB Trägheit annimmt.

185. Ein Stab, der nicht ganz gleichförmig ist, kann nach der allgemeinen Methode des §. 90 behandelt werden. Wir haben mit der dort angenommenen Bezeichnungsweise:

$$c^r = \int B_0 \left(\frac{d^2 u_r}{dx^2}\right)^2 dx, \quad \delta c_r = \int \delta B \left(\frac{d^2 u^r}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$a_r = \int \overline{\varrho\omega_0} u_r^2 dx, \qquad \delta a_r = \int \delta \overline{\varrho\omega} u_r^2 dx,$$

woraus, wenn P_r der uncorrigirte Werth von p_r ist, folgt:

$$p_r^2 = P_r^2 \left\{ 1 + \frac{\int \delta B \left(\frac{d^2 u_r}{dx^2}\right)^2 dx}{\int B_0 \left(\frac{d^2 u_r}{dx^2}\right)^2 dx} - \frac{\int \delta \overline{\varrho\omega} u_r^2 dx}{\int \overline{\varrho\omega_0} u_r^2 dx} \right\}$$

$$= P_r^2 \left\{ 1 + \frac{\int \delta B u''^2_r \delta x}{B_0 \int u_r^2 dx} - \frac{\int \delta \overline{\varrho\omega} u_r^2 dx}{\overline{\varrho\omega_0} \int u_r^2 dx} \right\} \quad . \quad . \quad (1).$$

Z. B. ist, wenn der Stab bei 0 festgeklemmt und bei l frei ist:

$$p_r^2 = \frac{B_0 m^4}{\rho \omega_0 l^4} \left\{ 1 + \frac{4}{l u_l^2} \int_0^l \frac{\delta B}{B_0} u''^2 dx - \frac{4}{l u_l^2} \int_0^l \frac{\overline{\delta \rho \omega}}{\rho \omega_0} u^2 dx \right\}.$$

Dieselbe Formel lässt sich auf einen doppeltfreien Stab anwenden.

Die Einwirkung eines kleinen Gewichtes dM ist daher gegeben durch:

$$p^2 = \frac{B_0 m^4}{\rho \omega_0 l^4} \left\{ 1 - 4 \frac{u^2 dM}{u_l^2 M'} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

worin M' die Masse des ganzen Stabes bedeutet. Ist das Gewicht am Ende, so ist seine Wirkung dieselbe wie die einer Verlängerung des Stabes in dem Verhältniss von $M' : M' + dM$ (vergleiche §. 167).

186. Dasselbe Princip kann dazu verwandt werden, die Correction zu berechnen, welche von der Rotationsträgheit eines gleichförmigen Stabes herrührt. Wir haben nur ausfindig zu machen, welcher Zuwachs der kinetischen Energie ertheilt werden muss bei der Annahme, dass der Stab nach demselben Gesetze schwingt, welches sich ergeben würde, wenn keine Rotationsträgheit vorhanden wäre.

Wir wollen z. B. den Fall eines Stabes nehmen, der bei 0 festgeklemmt und bei l frei ist, und annehmen, dass die Schwingung von folgendem Typus ist:

$$y = u \cos p t,$$

wo u eine der in §. 179 untersuchten Functionen darstellt. Die kinetische Energie der Rotation ist:

$$\frac{1}{2} \int \rho \omega \varkappa^2 \left(\frac{d^2 y}{dx\, dt} \right)^2 dx = \frac{\rho \omega \varkappa^2 m^2 p^2}{2 l^2} \sin^2 pt \int_0^l u'^2 dx$$

$$= \frac{\rho \omega \varkappa^2 m p^2}{8 l} \sin^2 pt \, (2 u u' + m u'^2)_l,$$

nach (2) §. 165.

Hierzu muss hinzugefügt werden:

$$\frac{\varrho\,\omega}{2}\,p^2 \sin^2 p\,t \int_0^l u^2\,dx \text{ oder } \frac{\varrho\,\omega\,l}{8}\,p^2 \sin^2 p\,t\,u_l^2,$$

so dass die kinetische Energie in dem Verhältnisse:

$$1 : 1 + \frac{m\,\varkappa^2}{l^2}\left(2\,\frac{u'}{u} + m\,\frac{u'^2}{u^2}\right)_l$$

vergrössert wird.

Die geänderte Schwingungszahl steht zu der, welche ohne Rücksichtnahme auf die Rotationsträgheit berechnet wird, in einem Verhältnisse, welches die Quadratwurzel von dem reciproken Werth des vorhergehenden Ausdrucks ist. Daher:

$$p : P = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{m\,\varkappa^2}{l^2}\left(2\frac{u'}{u} + m\,\frac{u'^2}{u^2}\right)_l \quad . \; . \; . \quad (1).$$

Mittelst der Relationen $\cosh m = -\sec m$, $\sinh m = \cos i\pi . \tan g\, m$ können wir, wenn $x = l$ ist, $\frac{u'}{u}$ in folgender Form ausdrücken:

$$\frac{u'}{u} = \frac{-\sin m}{\cos i\pi + \cos m} = \frac{\cos\alpha}{1 - \cos i\pi \sin\alpha},$$

wobei m durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$m = \frac{1}{2}(2i - 1)\,\pi - (-1)^i\,\alpha.$$

Beim tiefsten Ton ist $\alpha = 0{,}3043$ oder in Graden und Minuten ausgedrückt, $\alpha = 17^0\,26'$, woraus:

$$\frac{u'}{u} = 0{,}73413,\quad 2\,\frac{u'}{u} + m\,\frac{u'^2}{u^2} = 2{,}4789.$$

Daher:

$$p : P = 1 - 2{,}3241\,\frac{\varkappa^2}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

welches für den tiefsten Ton die Correction für die Rotationsträgheit giebt.

Schon bei mässiger Grösse der Ordnungszahl des Tones ist α sehr klein und dann ist:

$$u' : u \text{ merklich } = 1,$$

und

$$p : P = 1 - \left(1 + \frac{m}{2}\right)\frac{m\varkappa^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Diese Relation zeigt, dass die Correction mit der Ordnung der Componenten an Bedeutung zunimmt.

Bei allen gewöhnlichen Stäben ist $\varkappa : l$ sehr klein; das von dem Quadrate dieses Ausdrucks abhängige Glied kann dann ohne merklichen Irrthum vernachlässigt werden.

187. Wenn die Starrheit und Dichte eines Stabes längs des letzteren von Punkt zu Punkt sich ändern, so können die Normalfunctionen im Allgemeinen analytisch nicht ausgedrückt werden; jedoch kann die Natur derselben nach den Methoden von Sturm und Lionville, welche in §. 142 aus einander gesetzt sind, untersucht werden.

Bedeutet wie in §. 162 B den variablen Biegungswiderstand in irgend einem Punkte des Stabes, ferner $\varrho\,\omega\,dx$ die Masse des Elementes, dessen Länge dx ist, so finden wir für die allgemeine Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(B\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \varrho\,\omega\,\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wobei die Wirkungen der Rotationsträgheit vernachlässigt sind. Nehmen wir an, dass $y \propto \cos \nu t$, so erhalten wir als Bestimmungsgleichung für die Form der Normalfunctionen:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(B\,\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \nu^2\varrho\,\omega\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin ν^2 durch die Endbedingungen auf Werthe aus der unendlichen Reihe von endlichen Grössen $\nu_1^2, \nu_2^2, \nu_3^2 \cdots$ beschränkt ist.

Wir wollen z. B. annehmen, dass der Stab an beiden Enden festgeklemmt ist, so dass die Endwerthe von y und $\frac{dy}{dx}$ verschwinden. Die erste Normalfunction, für welche ν^2 seinen niedrigsten Werth ν_1^2 hat, besitzt keine innere Wurzel, so dass die Schwingungscurve ganz auf der einen Seite der Gleichgewichtslage liegt. Die zweite Normalfunction hat eine innere

Wurzel, die dritte Normalfunction hat zwei innere Wurzeln, und allgemein besitzt die $r$te Function $r - 1$ innere Wurzeln.

Jedes Paar von verschiedenen Normalfunctionen ist conjugirt, d. h. ihr Product verschwindet, wenn es mit $\varrho\,\omega\,dx$ multiplicirt und über die ganze Länge des Stabes integrirt wird.

Wir wollen die Anzahl von Wurzeln einer Function $f(x)$ von der Form:

$$f(x) = \varphi_m u_m(x) + \varphi_{m+1} u_{m+1}(x) + \cdots + \varphi_n u_n(x) \quad . . (3)$$

untersuchen, die von einer endlichen Zahl von Normalfunctionen zusammengesetzt ist. Die Function von der niedrigsten Ordnung soll $u_m(x)$ sein und die von der höchsten Ordnung $u_n(x)$. Ist die Anzahl der inneren Wurzeln von $f(x)$ gleich μ, so dass im Ganzen $\mu + 4$ Wurzeln vorhanden sind, so kann die derivirte Function $f'(x)$ nicht weniger wie $\mu + 1$ innere Wurzeln ausser zwei Wurzeln an den Enden haben; die zweite derivirte Function kann nicht weniger wie $\mu + 2$ Wurzeln besitzen. Wird die letztere Function mit B multiplicirt, so können keine Wurzeln verloren gehen; eine weitere doppelte Differentiation wird mindestens μ innere Wurzeln zurücklassen. Daher folgern wir aus (2) und (3), dass:

$$\nu_m^2 \varphi_m u_m(x) + \nu_{m+1}^2 \varphi_{m+1} u_{m+1}(x) + \cdots + \nu_n^2 \varphi_n u_n(x) \quad . . (4)$$

mindestens so viel Wurzeln wie $f(x)$ hat. Da (4) eine Function von derselben Form wie $f(x)$ ist, so kann dasselbe Argument wiederholt und eine Reihe von Functionen erhalten werden, von denen jedes Glied mindestens eben so viel Wurzeln wie $f(x)$ hat. Man erhält schliesslich, wenn diese Operation, durch welche (4) von (3) abgeleitet wurde, hinreichend oft wiederholt wird, eine Function, deren Form so wenig, wie wir wollen, von der der Normal-Functionscomponente $u_n(x)$ mit der höchsten Ordnung abweicht; wir schliessen hieraus, dass $f(x)$ nicht mehr wie $n - 1$ innere Wurzeln haben kann. In gleicher Weise können wir beweisen, dass $f(x)$ nicht weniger wie $m - 1$ innere Wurzeln besitzen kann.

Die Anwendung dieses Theorems auf den Nachweis der Möglichkeit der Entwickelung einer beliebigen Function in

eine unendliche Reihe von Normalfunctionen würde genau wie in §. 142 ausgeführt werden.

188. Ist der Stab, dessen seitliche Schwingungen betrachtet werden sollen, einer Längsspannung unterworfen, so setzt sich die potentielle Energie jeder Configuration aus zwei Theilen zusammen, von denen der erste von der Steifigkeit abhängt, die sich der biegenden Kraft direct widersetzt, und die zweite von der Reaction gegen die Ausdehnung, welche eine nothwendige Begleiterin der Biegung ist, wenn die Enden Knotenpunkte sind. Der zweite Theil ist der potentiellen Energie einer gebogenen Saite ähnlich; der erste ist von derselben Art wie der, mit welchem wir uns bis jetzt in diesem Capitel beschäftigt haben, obgleich derselbe nicht ganz unabhängig von der permanenten Spannung ist.

Fassen wir die Ausdehnung einer Faser des Stabes mit dem Querschnitt $d\omega$ ins Auge, für welche die Projection ihres Abstandes von der Axe auf die Schwingungsebene gleich η ist. Da die Querschnitte, welche ursprünglich zur Axe normal waren, während der Biegung normal bleiben, so steht die Länge der Faser zu dem entsprechenden Element der Axe in dem Verhältniss: $R + \eta : R$, wo R der Krümmungsradius ist. Nun ist die Axe selbst in dem Verhältniss $q : q + T$ ausgedehnt von dem ungestreckten Zustand an gerechnet, wenn $T\omega$ die ganze Spannung bedeutet, welche der Stab erleidet. Daher ist die thatsächliche Spannung der Faser:

$$\left\{T + \frac{\eta}{R}(T + q)\right\} d\omega,$$

woraus wir für das Drehungsmoment des gegen den Querschnitt wirkenden Kräftepaares finden:

$$\int \left\{T + \frac{\eta}{R}(T + q)\right\} \eta\, d\omega = \frac{q + T}{R} \varkappa^2 \omega,$$

und für die ganze von der Steifheit herrührende potentielle Energie:

$$\frac{1}{2}(q + T)\, \varkappa^2 \omega \int \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

ein Ausdruck, welcher von dem früher (§. 162) benutzten durch die Einsetzung von $q + T$ statt q abweicht.

Da q die Spannung ist, welche dazu erfordert wird, einen Stab mit dem Querschnitt Eins auf das Doppelte seiner natürlichen Länge zu bringen, so ist es klar, dass in den meisten praktischen Fällen T im Vergleich mit q vernachlässigt werden darf.

Der Ausdruck (1) giebt die Arbeit an, welche während der Streckung des Stabes gewonnen würde, wenn die Länge eines jeden Elementes der Axe während des Vorganges constant erhalten würde. Wird aber einem gestreckten Stabe oder Saite gestattet, aus einer verschobenen Lage in die natürliche überzugehen, so nimmt die Länge der Axe ab. Der Betrag der Abnahme ist $\frac{1}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$ und der entsprechende Gewinn an Arbeit:

$$\frac{1}{2}\,T\omega\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Daher ist:

$$V = \frac{1}{2}\,(q + T)\,\varkappa^2\omega\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\,T\omega\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \;.\;.\; (2).$$

Die Variation des ersten Theiles, welche von einer hypothetischen Verschiebung herrührt, ist in §. 162 gegeben. Für den zweiten Theil haben wir:

$$\frac{1}{2}\delta\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \int\frac{dy}{dx}\,\frac{d\delta y}{dx}\,dx = \left\{\frac{dy}{dx}\,\delta y\right\} - \int\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta y\,dx \;..\,(3).$$

In allen den Fällen, welche wir zu beachten haben, verschwindet δy an den Grenzen. Die allgemeine Differentialgleichung ist demgemäss:

$$\varkappa^2\,(q + T)\,\frac{d^4y}{dx^4} - T\,\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\,\frac{d^2y}{dt^2} - \varkappa^2\rho\,\frac{d^4y}{dx^2\,dt^2} = 0,$$

oder, wenn wir $q + T = b^2\rho$, $T = a^2\rho$ setzen:

$$\varkappa^2\left(b^2\,\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^4y}{dx^2\,dt^2}\right) - a^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \;\;.\;.\; (4).$$

Wegen einer noch detaillirteren Untersuchung dieser Gleichung verweise ich den Leser auf die Arbeiten von Clebsch[1]) und Donkin.

189. Sind die Enden des Stabes oder Drahtes festgeklemmt, so ist $\frac{dy}{dx} = 0$ und die Endbedingungen sind erfüllt. Ist die Art der Unterstützung eine solche, dass an dem Ende, während dasselbe durch äussere Gebundenheit zu einem Knotenpunkt gemacht wird, kein auf den Stab wirkendes Kräftepaar vorhanden ist, so muss $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwinden, d. h. das Ende muss gerade sein. Eine derartige Annahme wird gewöhnlich gewählt als Darstellung des Falles, wo eine Saite über Stege ausgespannt ist, wie in vielen musikalischen Instrumenten; es ist aber klar, dass der Theil der Saite über den Steg hinaus an der Schwingung Theil nehmen muss und dass deshalb seine Länge nicht ein Etwas ist, welches keinen Einfluss hat.

Nehmen wir in der allgemeinen Differentialgleichung y porportional $\cos nt$, so erhalten wir:

$$\varkappa^2\left(b^2\frac{d^4y}{dx^4} + n^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) - a^2\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0 \quad . \; . \; (1),$$

welcher Gleichung offenbar Genüge gethan wird durch:

$$y = \sin i\frac{\pi x}{l}\cos nt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

wenn i zweckmässig bestimmt wird. Dieselbe Lösung bringt y und y'' an den Enden zum Verschwinden. Durch Einsetzung dieses Werthes in (1) erhalten wir für n:

$$n^2 = \frac{i^2\pi^2}{l^2}\,\frac{a^2l^2 + i^2\pi^2\varkappa^2b^2}{l^2 + i^2\pi^2\varkappa^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

welcher Ausdruck die Schwingungszahl bestimmt.

Nehmen wir den Draht als unendlich dünn, so ist $n^2 = i^2\pi^2a^2 : l^2$, dasselbe, was wir in Capitel VI fanden, indem wir von der Annahme einer vollkommenen Biegsamkeit aus-

[1]) Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.

gingen. Behandeln wir $\varkappa : l$ als eine sehr kleine Grösse, so ist der angenäherte Werth von n:

$$n = \frac{i\pi a}{l}\left\{1 + i^2 \frac{\pi^2 \varkappa^2}{2 l^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\right\}.$$

Für einen Draht von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius r ist $\varkappa^2 = \frac{1}{4} r^2$; ersetzen wir b und a durch ihre Ausdrücke in Werthen von q, T und r, so erhalten wir:

$$n = \frac{i\pi a}{l}\left\{1 + \frac{i^2\pi^2}{8}\frac{r^2}{l^2}\frac{q}{T}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (4),$$

welches die Correction wegen der Steifigkeit[1]) giebt. Da der Ausdruck in der Klammer i enthält, so ist es klar, dass die harmonische Relation zwischen den Toncomponenten durch die Steifigkeit gestört wird.

190. Die Untersuchung der Correction wegen der Steifigkeit ist, wenn die Enden des Drahtes festgeklemmt sind, nicht so einfach wegen der Aenderung im Typus, welche nahe bei den Enden eintritt. Um von dem in dem vorigen Abschnitt behandelten Fall zu dem ebengenannten überzugehen, muss eine hinzukommende Gebundenheit eingeführt werden, welche die Wirkung einer noch weiteren Erhöhung der Tonhöhe hat. Das Folgende enthält in der Hauptsache die Untersuchung von Seebeck und Donkin.

Wird die Rotationsträgheit vernachlässigt, so lautet die Differentialgleichung:

$$\left(D^4 - \frac{a^2}{\varkappa^2 b^2} D^2 - \frac{n^2}{b^2 \varkappa^2}\right) y = 0 \quad \ldots \ldots (1),$$

wo D für $\frac{d}{dx}$ eingesetzt ist. In der Gleichung:

$$D^4 - \frac{a}{\varkappa^2 b^2} D^2 - \frac{n^2}{b^2 \varkappa^2} = 0$$

muss einer der Werthe von D^2 positiv sein, und der andere negativ. Wir können daher setzen:

---

[1]) Donkin's Acoustics Art. 184.

$$D^4 - \frac{a^2}{\varkappa^2 b^2} D^2 - \frac{n^2}{b^2 \varkappa^2} = (D^2 - \alpha^2)(D^2 + \beta^2) \ldots . (2),$$

und für das vollständige Integral von (1):

$$y = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$
$$+ C \cos \beta x + D \sin \beta x \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

worin α und β Functionen von n sind, die durch (2) bestimmt werden.

Man muss nun die Lösung so einrichten, dass dieselbe die vier Grenzbedingungen erfüllt, was, da nur drei disponible Verhältnisse vorhanden sind, zu einer α, β und l verbindenden Gleichung führt. Diese kann in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\sinh \alpha l \sin \beta l}{1 - \cosh \alpha l \cos \beta l} + \frac{2 \alpha \beta}{\alpha^2 - \beta^2} = 0 \quad \ldots \quad (4).$$

Der durch (2) bestimmte Werth von $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$ ist: $\frac{2 n b \varkappa}{a^2}$, so dass:

$$\frac{\sinh \alpha l \sin \beta l}{1 - \cosh \alpha l \cos \beta l} + \frac{2 n b \varkappa}{a^2} = 0 \quad \ldots \quad (5).$$

Aus (2) finden wir ebenso, dass:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{a^2}{2 b^2 \varkappa^2}\left\{\sqrt{1 + 4 \frac{n^2 b^2 \varkappa^2}{a^4}} + 1\right\} \\ \beta^2 &= \frac{a^2}{2 b^2 \varkappa^2}\left\{\sqrt{1 + 4 \frac{n^2 b^2 \varkappa^2}{a^4}} - 1\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6).$$

Soweit sind unsere Gleichungen streng richtig, oder besser gesagt in soweit streng richtig, als es die Differentialgleichung ist, auf welche dieselben gegründet sind; wir wollen aber jetzt die Annahme einführen, dass die betrachtete Schwingung durch Vorhandensein von Starrheit, wenn auch nur wenig, beeinflusst wird. Wenn das der Fall, so ist der angenäherte Ausdruck für y:

$$y = \sin \frac{i \pi x}{l} \cos\left(\frac{i\pi}{l} a t\right),$$

und daher angenähert:

$$\beta = \frac{i\pi}{l}, \; n = \frac{i \pi a}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Die Einführung dieser Werthe in die zweite der Gleichungen (6) beweist, dass $n^2 \frac{b^2 \varkappa^2}{a^4}$ oder $\frac{b^2}{a^2} \frac{\varkappa^2}{l^2}$ unter den betrachteten Umständen einen kleinen Werth hat und daher $\alpha^2 l^2$ einen grossen Werth. Da $\cosh \alpha l$, $\sinh \alpha l$ beide gross sind, so reducirt sich Gleichung (5) auf:

$$\tan \beta l = \frac{2 n b \varkappa}{a^2},$$

oder bei Einführung des angenäherten Werthes für β, der aus (6) abgeleitet wird:

$$\tan \frac{nl}{a} = 2 \frac{nb\varkappa}{a^2}.$$

Der Näherungswerth von $\frac{nl}{a}$ ist π. Setzen wir: $\frac{nl}{a} = i\pi + \vartheta$, so erhalten wir:

$$\tan (i\pi + \vartheta) = \tan \vartheta = \vartheta = 2 \frac{nb\varkappa}{a^2} = 2 i \pi \frac{b}{a} \frac{\varkappa}{l},$$

so dass:

$$n = i \frac{\pi a}{l} \left(1 + 2 \frac{b}{a} \frac{\varkappa}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Nach dieser Gleichung wird die Tonhöhe aller Toncomponenten um dasselbe kleine Intervall erhöht, und daher wird die harmonische Relation durch die Starrheit nicht gestört. Wahrscheinlich würde das anders sein, wenn Glieder, die $\varkappa^2 : l^2$ enthalten, zurückgeblieben wären. Es ergiebt sich daher nicht, dass die harmonische Relation trotz der Starrheit besser gewahrt bleibt, wenn die Enden festgeklemmt sind, als wenn sie frei sind, sondern wir können nur die Folgerung ziehen, dass in dem ersteren Falle kein Zuwachs in der Störung eintritt, wenn auch die absolute Aenderung der Tonhöhe viel grösser ist. Es ist zu bemerken, dass $b : a$ oder $\sqrt{q + T} : \sqrt{T}$ einen grossen Werth hat und dass, wenn unser Resultat correct sein soll, $\varkappa : l$ klein genug sein muss, um die Multiplication mit $b : a$ zu vertragen, ohne dabei an Kleinheit relativ einzubüssen.

Das in (8) enthaltene theoretische Resultat wurde von Seebeck mit dem Experiment verglichen; es stellte sich eine

genügende Uebereinstimmung heraus. Die Constante der Steifigkeit wurde aus Beobachtungen über die Raschheit der Schwingungen eines kleinen Drahtstückes bestimmt, von dem ein Ende in einem Schraubstock festgeklemmt war.

191. In diesem Capitel hat sich gezeigt, dass die Theorie von Stäben, selbst wenn sie durch Vernachlässigung von unwichtigen Grössen auf das Aeusserste beschränkt wird, entschieden complicirter ist, wie die von vollkommen biegsamen Saiten. Der Grund zu der ausserordentlichen Einfachheit der Schwingungen von Saiten ist in der Thatsache zu suchen, dass bei ihnen Wellen vom harmonischen Typus sich mit einer von der Wellenlänge unabhängigen Geschwindigkeit fortpflanzen, so dass eine beliebige Welle ohne Zersetzung sich fortbewegen kann. Wenn wir aber von Saiten zu Stäben übergehen, so kann die Constante in der Differentialgleichung: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \varkappa^2 b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$ nicht länger als eine Geschwindigkeit ausgedrückt werden. Daher kann die Geschwindigkeit der Fortbewegung eines Zuges von harmonischen Wellen nicht von der Differentialgleichung allein abhängen, sondern muss mit der Wellenlänge variiren. In der That reicht, wenn es zugelassen wird, dass der Zug von harmonischen Wellen überhaupt fortgepflanzt werden kann, diese Betrachtung von selbst zu dem Nachweis hin, dass die obige Geschwindigkeit sich umgekehrt wie die Wellenlänge verhält. Dasselbe kann aus der auf Wellen, die von einer Richtung sich fortpflanzen, anwendbaren Lösung: $y = \cos \frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x)$ gesehen werden, welche der Differentialgleichung genügt, wenn:

$$V = \frac{2\pi\varkappa b}{\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Wir wollen annehmen, es seien zwei Wellenzüge von gleicher Amplitude, aber von verschiedenen Wellenlängen vorhanden, welche in derselben Richtung forteilen. Daher ist:

$$y = \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau'} - \frac{x}{\lambda'}\right)$$
$$= 2\cos\pi\left\{t\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) - x\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\right\}$$
$$\cos\pi\left\{t\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'}\right) - x\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)\right\} \quad . \quad . \quad (2).$$

Sind $\tau' - \tau$ und $\lambda' - \lambda$ klein, so haben wir einen Zug von Wellen, deren Amplituden zwischen den Werthen 0 und 2 langsam von einem Punkte zum andern variiren; dieselben bilden eine Reihe von Gruppen, die von einander durch Zwischenräume getrennt sind, in denen wenigstens vergleichsweise keine Verschiebung vorhanden ist. Bei einer Saite oder einer Luftsäule ändert sich λ wie τ, und dann bewegen sich die Gruppen mit derselben Geschwindigkeit wie die einzelnen Züge vorwärts; in diesem Falle findet ferner keine Aenderung des Typus statt. Es ist anders, wenn wie bei einem transversal schwingenden Stabe die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Function der Wellenlänge ist. Die Lage der Mitte der Gruppe, welche ursprünglich in dem Anfangspunkte war, zur Zeit t, wird durch:

$$t\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) - x\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 0$$

gegeben, welcher Ausdruck zeigt, das die Geschwindigkeit der Gruppe ist:

$$\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) : \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \delta\left(\frac{1}{\tau}\right) : \delta\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Nehmen wir an, dass sich die Geschwindigkeit V eines Wellenzuges wie λ^n ändert, so finden wir:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\tau}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\left(\frac{V}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = -(n-1)\,V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

In dem vorliegenden Falle ist $n = -1$, und demgemäss ist die Geschwindigkeit der Gruppe das Doppelte von der der Wellencomponenten[1]).

192. Wegen der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge hat der Zustand eines unbegrenzten Stabes zu irgend einem Zeitpunkt, welcher der anfänglichen, auf einen begrenzten Theil beschränkten, Verschiebung nachfolgt, nichts von der Einfachheit, die das entsprechende Problem bei einer Saite charakterisirt. Nichtsdestoweniger mag Fourier's Untersuchung dieser Frage hier einen eigenen Platz finden.

Es wird gefordert, eine Function von x und t derart zu bestimmen, dass dieselbe der Gleichung genügt:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

und im Anfange $y = \varphi(x)$, $\dot{y} = \psi(x)$ macht.

Eine Lösung von (1) ist:

$$y = \cos q^2 t \cos q\,(x - \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

worin q und α Constanten sind. Hieraus schliessen wir, dass:

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, F(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} dq \cos q^2 t \cos q\,(x - \alpha)$$

ebenfalls eine Lösung ist, in welcher $F(\alpha)$ eine beliebige Function von α bedeutet. Setzen wir nun $t = 0$, so kommt:

$$y_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, F(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} dq \cos q\,(x - \alpha).$$

---

[1]) Bei dem entsprechenden Problem für Wellen auf der Oberfläche von tiefem Wasser variirt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit direct wie die Quadratwurzel der Wellenlänge, so dass $n = \frac{1}{2}$. Die Geschwindigkeit einer Gruppe von solchen Wellen ist daher die Hälfte von derjenigen der die Gruppe zusammensetzenden Wellenzüge.

Dieses Integral zeigt, dass $F(\alpha)$ gleich $\frac{1}{2\pi}\,\varphi(\alpha)$ gewählt werden muss, denn dann ist nach Fourier's Doppelintegraltheorem $y_0 = \varphi(x)$. Ueberdies ist $\dot{y} = 0$. Daher genügt:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\varphi(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dq\,\cos q^2 t\,\cos q\,(x - \alpha)\,.\,.\,(3)$$

der Differentialgleichung und macht im Anfange:

$$y = \varphi(x) \text{ und } \dot{y} = 0.$$

Entweder nach Stokes' Theorem (§. 95) oder unabhängig davon können wir nun den übriggebliebenen Theil der Lösung ergänzen, welcher der Differentialgleichung zu genügen hat, während durch denselben im Anfange $y = 0$, $\dot{y} = \psi(x)$ gemacht wird. Dieser Theil der Lösung ist:

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\psi(\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty} dq\,\frac{1}{q^2}\sin q^2 t\,\cos q\,(x - \alpha)\,.\,.\,(4).$$

Das vollständige Resultat wird durch Addition der Glieder auf der rechten Seite von (3) und (4) erhalten.

Die Integration nach q kann in (3) mit Hülfe der Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\,\cos^2 qt\,\cos qz = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z^2}{4t}\right)\,.\;.\;.\;.\;(5)$$

ausgeführt werden. Diese Formel lässt sich folgendermaassen ableiten. Setzen wir in dem wohlbekannten Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a},$$

$x + b$ für x, so erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(x^2 + 2bx)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,e^{a^2 b^2}.$$

Nun nehmen wir $a^2 = i = e^{\frac{1}{2}i\pi}$, wo $i = \sqrt{-1}$, und behalten nur den reellen Theil der Gleichung. Dann geht diese über in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2 + 2bx)\,dx = \sqrt{\pi}\,\sin\left(b^2 + \frac{\pi}{4}\right),$$

woraus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}\,\sin\left(b^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Hieraus folgt durch einfache Aenderung der Variabeln die Gleichung (5). Daher können wir Gleichung (3) schreiben:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\varphi(\alpha) \sin\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{(x-\alpha)^2}{4t}\right\}$$

oder, wenn wir $\frac{\alpha - x}{2\sqrt{t}} = \mu$ setzen:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\,(\cos\mu^2 + \sin\mu^2)\,\varphi(x + 2\mu\sqrt{t}) \quad . \quad . \quad (6).$$

Capitel IX.

Schwingungen von Membranen.

193. Die theoretische Membran ist eine vollkommen biegsame und unendlich dünne Lamelle von fester Substanz von gleichförmigem Material und ebenso Dicke. Ferner ist die Lamelle nach allen Richtungen durch eine Spannung gestreckt, die so gross ist, dass sie während der betrachteten Schwingungen und Verschiebungen ungeändert bleibt. Zieht man in Gedanken eine Linie quer über die Membran nach irgend einer Richtung, so ist die gegenseitige Wirkung zweier durch ein Element dieser Linie getrennten Theile auf einander proportional der Länge des Elementes und senkrecht zu der Richtung des letzteren. Ist die fragliche Kraft $T_1\, ds$, so wollen wir T_1 die Spannung der Membran nennen; es ist dieses eine Grösse, deren Dimension in Bezug auf die Masse gleich 1 und in Bezug auf die Zeit gleich — 2 ist.

Das mit dem vorliegenden Gegenstand verknüpfte Hauptproblem ist die Untersuchung der Transversalschwingungen von Membranen von verschiedener Gestalt, deren Begrenzungen fest sind. Allerdings können auch andere Fragen aufgeworfen werden, indessen haben diese vergleichsweise ein geringes Interesse. Ueberdies werden die Methoden, welche zur Lösung dieser Fragen benutzt werden, in anderen Theilen dieses Werkes hinreichend erläutert. Wir können daher sofort zu der

Betrachtung einer Membran übergehen, welche über eine in festen, geschlossenen, ebenen Grenzen eingeschlossene Fläche ausgespannt ist.

194. Wir wollen die Ebene der Begrenzung als die $x\,y$ Ebene nehmen; es bezeichne dann w die kleine Verschiebung eines Punktes P der Membran aus dieser Ebene heraus. Um P nehmen wir eine kleine Fläche S, und fassen die Kräfte ins Auge, welche auf diese parallel z wirken. Der wirksame Theil der Spannung wird durch:

$$T_1 \int \frac{dw}{dn}\, ds$$

ausgedrückt, worin ds ein Element der Begrenzung von S und dn ein Element der nach auswärts an der Begrenzungscurve gezogenen Normale bedeutet. Diese Spannung hält das Gegengewicht die durch $\varrho S \ddot{w}$ gemessene Reaction gegen die Beschleunigung, ϱ ist hierbei ein Symbol, welches die Oberflächendichtigkeit bedeutet, und dessen Dimensionen in Bezug auf die Masse gleich 1 und in Bezug auf Länge gleich — 2 sind. Nun ist, wenn:

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2},$$

nach dem Green'schen Satz:

$$\int \frac{dw}{dn}\, ds = \int\int \nabla^2 w\, dS = \nabla^2 w\,.\,S \text{ schliesslich;}$$

daher lautet die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{T_1}{\varrho}\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die an der Begrenzung zu erfüllende Bedingung ist selbstverständlich $w = 0$.

Diese Differentialgleichung konnte auch aus dem Ausdruck für die potentielle Energie gefunden werden, welcher seinerseits durch Multiplication der Spannung mit der Streckung der Oberfläche erhalten wird. Die in ihrer Grösse geänderte Fläche ist:

$$\int\int\sqrt{1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2}\,dx\,dy;$$

daher:

$$V=\frac{1}{2}\,T_1\int\int\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right\}dx\,dy\;.\;.\;.\;(2),$$

woraus δV leicht durch eine theilweise Integration gefunden wird.

Schreiben wir $T_1:\varrho=c^2$, so hat c die Natur einer Geschwindigkeit und die Differentialgleichung wird:

$$\frac{d^2w}{dt^2}=c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

195. Wir wollen nun annehmen, dass die Grenzen der Membran das durch die Coordinatenaxen und die Linien $x=a$, $y=b$ gebildete Reckteck sind. Jeder Punkt innerhalb dieser Fläche genügt der Gleichung (3) §. 194 und jeder Punkt der Begrenzung der Bedingung $w=0$.

Ein singuläres Integral der Differentialgleichung ist augenscheinlich:

$$w=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos pt\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1),$$

worin:

$$p^2=c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2),$$

und m und n ganze Zahlen sind. Aus diesem Integral kann die allgemeine Lösung abgeleitet werden. So ist:

$$w=\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot$$

$$\sin\frac{n\pi y}{b}\{A_{mn}\cos pt+B_{mn}\sin pt\}\;.\;.\;.\;(3).$$

Dass dieses Resultat wirklich allgemein ist, lässt sich nachträglich beweisen, indem man zeigt, dass dasselbe willkürliche Anfangsbedingungen auszudrücken vermag.

Was für eine Function der Coordinaten w auch sein mag, stets kann w für alle Werthe von x zwischen den Grenzen 0 und a durch eine Reihe:

$$Y_1 \sin \frac{\pi x}{a} + Y_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + \cdots$$

ausgedrückt werden, worin die Coefficienten Y_1, Y_2 etc. unabhängig von x sind. Weiter kann jeder der Coefficienten Y, was für eine Function von y derselbe auch sein mag, zwischen den Grenzen 0 und b in der Reihe:

$$C_1 \sin \frac{\pi y}{b} + C_2 \sin \frac{2\pi y}{b} + \cdots$$

entwickelt werden, worin C etc. Constanten sind. Hieraus schliessen wir, dass jede Function von x und y innerhalb der Grenzen des Rechteckes sich in folgende Doppelreihe entwickeln lässt:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

und dass daher der Ausdruck für w in (3) so angepasst werden kann, dass er beliebige, willkürliche Anfangswerthe von w und $\dot{w}$ darstellt. In der That ist:

$$\left.\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b w_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy, \\ B_{mn} &= \frac{4}{abp}\int_0^a\int_0^b \dot{w}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (4).$$

Der Charakter der Normalfunctionen eines gegebenen Rechteckes:

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

in Bezug auf die Abhängigkeit von m und n ist leicht verständlich. Sind m und n beide gleich der Einheit, so behält w über das ganze Reckteck hin dasselbe Zeichen und verschwindet allein in den Kanten; in jedem andern Fall sind dagegen Knotenlinien vorhanden, die den Coordinatenaxen parallel laufen. Die Anzahl der parallel x laufenden Knotenlinien ist $n - 1$, ihre Gleichungen sind:

$$y = \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \cdots \frac{(n-1)\,b}{n}.$$

Auf dieselbe Weise sind die Gleichungen der parallel y laufenden Knotenlinien:

$$x = \frac{a}{m}, \ \frac{2a}{m}, \dots \frac{(m-1)a}{m},$$

ihre Anzahl ist $m - 1$. Das System von Knotenlinien theilt das Rechteck in mn gleiche Theile, in jedem derselben wiederholt sich jeder numerische Werth von w.

196. Der Ausdruck für w in Werthen der Normalfunctionen ist:

$$w = \Sigma\Sigma\varphi_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \dots \dots \quad (1),$$

worin φ_{mn} etc. die Normalcoordinaten sind. Wir wollen jetzt dazu übergehen, den Ausdruck für V in Werthen von φ_{mn} anzugeben. Wir haben:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = \pi^2 \left\{\Sigma\Sigma\varphi_{mn}\frac{m}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right\}^2,$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)^2 = \pi^2 \left\{\Sigma\Sigma\varphi_{mn}\frac{n}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\right\}^2.$$

Integriren wir diese Ausdrücke über die Fläche des Rechteckes, so verschwinden die Producte der Normalcoordinaten und wir finden:

$$V = \frac{T_1}{2}\int\int\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$= \frac{T_1}{2}\frac{ab\pi^2}{4}\Sigma\Sigma\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\varphi_{mn}^2 \quad \dots \quad (2),$$

wobei die Summationen über alle ganze Werthe von m und n ausgedehnt werden.

Man beweist auf dieselbe Weise, dass der Ausdruck für die kinetische Energie sich folgendermaassen stellt:

$$T = \frac{\varrho}{2}\frac{ab}{4}\Sigma\Sigma\dot{\varphi}_{mn}^2 \dots \dots \dots \quad (3),$$

woraus wir als Normalform der Bewegungsgleichung ableiten:

$$\ddot{\varphi}_{mn} + c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\varphi_{mn} = \frac{4}{ab\varrho}\Phi_{mn} \dots (4).$$

In dieser Gleichung ist:

$$\Phi_{mn} = \int_0^a \int_0^b Z \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy \quad . \; . \; . \quad (5),$$

wenn $Z\,dx\,dy$ die auf das Element $dx\,dy$ wirkende transversale Kraft darstellt.

Wir wollen nun annehmen, dass der Anfangszustand ein Ruhezustand ist unter der Wirkung einer constanten Kraft Z, welche z. B. von dem Drucke eines Gases herrühren mag. Zur Zeit $t = 0$ wird die äussere Kraft entfernt und die Membran sich selbst überlassen. Im Anfange lautet die Gleichgewichtsgleichung:

$$c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (\varphi_{mn})_0 = \frac{4}{ab\varrho} \Phi_{mn} \quad . \; . \; . \; . \quad (6),$$

woraus $(\varphi_{mn})_0$ zu finden ist. Die Lage des Systems zur Zeit t wird dann in Verbindung mit (1) gegeben durch:

$$\varphi_{mn} = (\varphi_{mn})_0 \cos \left(\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \cdot c\pi t \right) \quad . \; . \; . \quad (7).$$

Um Φ_{mn} auszudrücken, haben wir nur in (5) für Z seinen Werth einzusetzen, oder in diesem einfachen Fall Z aus dem Integralzeichen herauszusetzen. Daher:

$$\Phi_{mn} = Z \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy,$$

$$= Z \frac{ab}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi).$$

Wir schliessen hieraus, dass Φ_{mn} verschwindet, wofern nicht m und n beide ungerade sind; ist letzteres der Fall, so haben wir:

$$\Phi_{mn} = \frac{4ab}{mn\pi^2} Z.$$

Demgemäss folgt, wenn m und n beide ungerade sind:

$$\varphi_{mn} = \frac{16 Z}{\pi^2 \varrho} \frac{\cos pt}{mnp^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8),$$

woraus:

$$p^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \qquad (9).$$

Dieses ist ein Beispiel von (8) §. 101.

Wird die Membran, welche vorher in ihrer Gleichgewichtslage in Ruhe ist, durch einen im Punkte $\alpha\,\beta$ angebrachten Stoss in Bewegung gesetzt, so lautet die Lösung:

$$\varphi_{mn} = \frac{4}{abp}\, sin\, \frac{m\pi\alpha}{a}\, sin\, \frac{n\pi\beta}{b} \int\int w_0\, dx\, dy\,.\, sin\, pt \qquad (10).$$

197. Die Schwingungszahl der natürlichen Schwingungen findet man, wenn man in dem Ausdruck:

$$\frac{p}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \qquad (1)$$

m und n verschiedene, ganzzahlige Werthe beilegt.

Für eine gegebene Schwingungsart sinkt die Tonhöhe, wenn eine von den beiden Seiten des Rechteckes verlängert wird. Bei der tiefsten Schwingungsart, wenn $m = 1$, $n = 1$, sind Verlängerungen der kürzeren Seite wirksamer; wenn die Form des Rechtecks sehr in die Länge gezogen ist, so sind Verlängerungen der längeren Seite meist ohne Wirkung.

Sind a^2 und b^2 incommensurabel, so können keine Paare von Werthen von m und n dieselbe Schwingungszahl geben; jede Fundamentalschwingungsart hat ihre eigene charakteristische Periode. Sind dagegen a^2 und b^2 commensurabel, so können zwei oder mehr Fundamentalschwingungsarten dieselbe Schwingungsdauer besitzen, und können dann in jedem Verhältniss zusammen bestehen, während die Bewegung immer noch ihren einfachen harmonischen Charakter beibehält. In solchen Fällen bestimmt die Angabe der Periode nicht ganz ausreichend die Schwingungsart. Eine vollständige Betrachtung des jetzt von selbst uns aufstossenden Problems erfordert die Beihülfe der Zahlentheorie; für die Zwecke dieses Buches wird es aber hinreichen, einige wenige von den einfacheren Fällen zu betrachten, welche eintreten, wenn die Membran quadratisch ist. Der Leser findet weitere Informationen in Riemann's Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen.

Ist $a = b$, so wird:

$$\frac{p}{2\pi} = \frac{c}{2a}\sqrt{m^2 + n^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Den niedrigsten Ton findet man, wenn man m und n gleich der Einheit setzt, welches nur eine Fundamentalschwingungsart ergiebt:

$$w = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\cos pt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Weiter wollen wir jetzt annehmen, dass eine der Zahlen m und n gleich 2 und die andere gleich 1 ist. Auf diese Weise werden zwei verschiedene Schwingungsarten erhalten, deren Perioden dieselben sind. Sind beide Schwingungen in der Phase synchron, so wird die ganze Bewegung ausgedrückt durch:

$$w = \left\{ C\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + D\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}\right\}\cos pt \ldots (4);$$

so dass, wenn auch jeder Theil synchron in einer harmonischen Bewegung schwingt, die Schwingungsart einigermaassen willkürlich ist.

Vier specielle Lösungen mögen besonders erwähnt werden. Zuerst, wenn $D = 0$:

$$w = C\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\cos pt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Diese Gleichung entspricht einer Schwingung mit einer Knotenlinie längs der Linie $x = \frac{1}{2}a$. Auf ähnliche Weise haben wir, wenn $C = 0$, eine Knotenlinie parallel dem andern Seitenpaar. Darnach wollen wir annehmen, dass C und D endlich und einander gleich sind. Es ist in diesem Falle w proportional:

$$\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a},$$

welcher Ausdruck in folgende Form gebracht werden kann:

$$2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a}\right).$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn:

$$sin \frac{\pi x}{a} = 0, \text{ oder } sin \frac{\pi y}{a} = 0,$$

oder auch, wenn:

$$cos \frac{\pi x}{a} + cos \frac{\pi y}{a} = 0.$$

Die ersten beiden Gleichungen geben die Kanten, welche ursprünglich als Knotenlinien angenommen waren; die dritte giebt $y + x = a$ und dies stellt eine Diagonale des Quadrates dar.

In dem vierten Fall, wenn $C = -D$, erhalten wir für die Knotenlinien die Kanten des Quadrates zusammen mit der Diagonale $y = x$. Die beistehenden Figuren stellen die vier Fälle dar.

Fig. 32.

$D = 0.$ $C = 0.$

$C - D = 0.$ $C + D = 0.$

Für andere Beziehungen zwischen C und D ist die innere Knotenlinie gekrümmt, bleibt aber stets analytisch ausgedrückt durch:

$$C\, cos \frac{\pi x}{a} + D\, cos \frac{\pi y}{a} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

und kann leicht mit Hülfe einer Tafel für die Logarithmen der Cosinusse construirt werden.

Der nächste Fall, was die Tonhöhe betrifft, tritt ein, wenn $m = 2$, $n = 2$. Da die Werthe von m und n einander gleich sind, so erfolgt bei Verwechselung derselben keine Aenderung; kein anderes Paar von Werthen für m und n giebt dieselbe Schwingungszahl. Der einzige zu betrachtende Schwingungstypus ist demnach:

$$w = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}\cos pt,$$

dessen Knotenlinien, die durch die Gleichung:

Fig. 33.

$$\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a} = 0$$

bestimmt werden, (ausser den Kanten) die geraden Linien:

$$x = \frac{1}{2}a, \quad y = \frac{1}{2}a$$

sind.

Der nächste Fall, welchen wir ins Auge fassen wollen, wird erhalten, wenn wir nach einander m und n die Werthe 3 und 1 oder 1 und 3 beilegen. Wir haben:

$$w = \left\{C\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + D\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a}\right\}\cos pt.$$

Die Knotenlinien werden gegeben durch:

$$\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\left\{C\left(4\cos^2\frac{\pi x}{a} - 1\right) + D\left(4\cos^2\frac{\pi y}{a} - 1\right)\right\} = 0,$$

oder, wenn wir die ersten beiden Factoren, die den Kanten entsprechen, weglassen:

$$C\left(4\cos^2\frac{\pi x}{a} - 1\right) + D\left(4\cos^2\frac{\pi y}{a} - 1\right) = 0 \;\ldots\; (7).$$

Ist $C = 0$, so haben wir: $y = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{2}{3}a$.

Ist $D = 0$, „ „ „ $x = \frac{1}{3}a$, $x = \frac{2}{3}a$.

Ist $C = -D$, so haben wir: $\cos \frac{\pi x}{a} = \pm \cos \frac{\pi y}{a}$,
woraus:

$$y = x, \quad y = a - x,$$

welche Gleichungen die beiden Diagonalen darstellen.

Schliesslich, wenn $C = D$, wird die Gleichung der Knotenlinie:

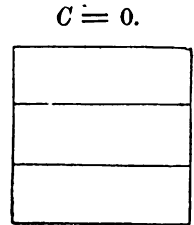
$$\cos^2 \frac{\pi x}{a} + \cos^2 \frac{\pi y}{a} = \frac{1}{2},$$

oder:

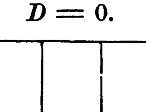
$$1 + \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Fig. 34.

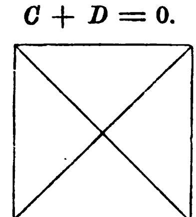
$C = 0.$



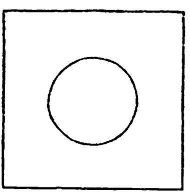
$D = 0.$



$C + D = 0.$







Im Falle (4) ist, wenn $x = \frac{1}{2} a$, $y = \frac{1}{4} a$ oder $= \frac{3}{4} a$; und ebenso, wenn $y = \frac{1}{2} a$, dann $x = \frac{1}{4} a$ oder $\frac{3}{4} a$. Daher wird jede Hälfte von jeder Linie, welche die Mittelpunkte gegenüberstehender Kanten verbinden, durch die Curve halbirt.

Es muss bemerkt werden, dass die Knotenlinie, welches auch das Verhältniss von C und D zu einander sein mag, stets

durch die vier Schnittpunkte der Knotenlinien in den beiden ersten Fällen, $C = 0$, $D = 0$, hindurchgeht. Werden die Schwingungen dieser beiden Fälle mit entsprechenden Phasen zusammengesetzt, so ist klar, dass in den schattirten Theilen der Fig. 35 die Richtungen der Verschiebungen dieselben sind, und dass daher in ihnen kein Theil der Knotenlinie zu finden ist. Welches auch das Verhältniss der Amplituden sein mag, die Knotenlinie muss nur durch die unschattirten Theile hindurchgehen. Wenn andererseits die Phasen entgegengesetzt sind, so wird die Knotenlinie ausschliesslich durch die schattirten Theile laufen.

Fig. 35.

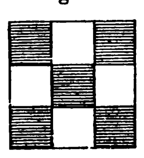
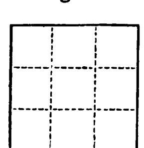


Fig. 36.



Ist $m = 3$, $n = 3$, so sind die Knotenlinien gerade Linien parallel den Kanten; sie sind in Fig 36 gezeichnet.

Der letzte Fall, den wir betrachten wollen, wird erhalten wenn man setzt:

$$m = 3,\ n = 2 \text{ oder } m = 2,\ n = 3.$$

Das System der Knotenlinien ist dann:

$$C \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + D \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a} = 0,$$

oder, wenn die den Kanten entsprechenden Factoren weggelassen werden:

$$C\left(4\cos^2\frac{\pi x}{a} - 1\right)\cos\frac{\pi y}{a} + D\cos\frac{\pi x}{a}\left(4\cos^2\frac{\pi y}{a} - 1\right) = 0 \ldots (9).$$

Verschwinden C und D, so kommen wir wieder auf das Knotenliniensystem der die Schwingung zusammensetzenden Einzelschwingungen; dieses System besteht aus geraden Linien parallel den Kanten. Ist $C = D$, so kann unsere Gleichung geschrieben werden:

$$\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \cos\frac{\pi y}{a}\right)\left(4\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a} - 1\right) = 0 \ . \ . \ . \ (10),$$

deren erster Factor die Diagonale $y + x = a$ darstellt, und der zweite eine hyperbolische Curve.

Ist $C = -D$, so erhalten wir dieselbe Figur nur mit der anderen Diagonale [1]).

198. Die Tonhöhe der natürlichen Schwingungsarten einer quadratischen Membran, die nahezu, wenn auch nicht ganz gleichförmig ist, kann mittelst der allgemeinen Methoden des §. 90 untersucht werden.

Wir wollen zunächst annehmen, dass m und n einander gleich sind. In diesem Falle ist, wenn die Tonhöhe einer gleichförmigen Membran gegeben ist, die Art ihrer Schwingung vollkommen bestimmt. Nehmen wir nun an, dass eine Dichtigkeitsänderung erfolgt, so wird der natürliche Schwingungstypus im Allgemeinen modificirt, indess kann man doch die Periode annähernd ausrechnen, ohne auf die Aenderung des Typus zu achten.

Wir haben:

$$T = \frac{1}{2}\int\int(\varrho_0 + \delta\varrho)\,\dot{\varphi}_{mm}^2 \sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{m\pi y}{a}\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}_{mm}^2\left\{\varrho_0\frac{a^2}{4} + \int\int\delta\varrho\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{m\pi y}{a}\,dx\,dy\right\},$$

das zweite Glied in der Klammer ist der dem $\delta\varrho$ zu verdankende Zuwachs von T. Daher haben wir, wenn $w \propto \cos pt$ und wenn P den Werth von p vor der Variation der Dichte bedeutet:

$$p_{mm}^2 : P_{mm}^2 = 1 - \frac{4}{a^2}\int_0^a\int_0^a\frac{d\varrho}{\varrho_0}\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{m\pi y}{a}\,dx\,dy \ldots (1),$$

woraus:

$$P_{mm}^2 = \frac{2c^2\pi^2 m^2}{a^2}, \text{ und } c^2 = T_1 : \varrho_0.$$

Ist z. B. ein kleines Gewicht in der Mitte des Quadrates befestigt, so ist:

$$p_{mm}^2 : P_{mm}^2 = 1 - \frac{4M}{a^2\varrho_0}\sin^4 m\frac{\pi}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $\sin^4\frac{1}{2}m\pi$ verschwindet, sobald m gerade, und gleich der Einheit ist, sobald m ungerade. In dem ersten Fall liegt

[1]) Lamè, *Leçon sur l'élasticité*, p. 129.

der Mittelpunkt auf der Knotenlinie der unbelasteten Membran, und daher ist die Hinzufügung des Gewichtes ohne Einfluss.

Sind indessen m und n ungleich, so zeigt das Problem, wenn dasselbe auch denselben allgemeinen Principien weiter unterliegt, eine Eigenthümlichkeit, welche verschieden ist von alle dem, welchem wir bis jetzt begegnet sind. Die für die unbelastete Membran natürliche Schwingungsart, welche einer bestimmten Periode entspricht, wird jetzt einigermaassen unbestimmt, indessen entfernt die Einführung des Gewichtes im Allgemeinen das unbestimmte Element. Versuchen wir die Periode unter Annahme, dass der Schwingungstypus nicht gestört wird, zu berechnen, so erhebt sich die Frage, wie die Auswahl des ungestörten Typus zu treffen ist, da man sieht, dass eine unendliche Anzahl von Typen vorhanden ist, die bei der gleichförmigen Beschaffenheit der Membran identische Perioden geben. Die Antwort darauf ist, dass diejenigen Typen gewählt werden müssen, welche unendlich wenig von denjenigen Typen abweichen, in welchen die Membran unter Wirkung des Gewichtes wirklich schwingt, und ein solcher Typus wird durch das Criterium bestimmt, dass die aus ihm berechnete Periode ein Maximum oder Minimum wird.

Als ein einfaches Beispiel wollen wir annehmen, dass ein kleines Gewicht auf der Membran in einem auf der Linie $x = \frac{1}{2} a$ liegenden Punkt befestigt ist und dass wir zu wissen wünschen, durch welche Periode die beiden gleichen Perioden der unbelasteten Membran, die bei Annahme von

$$m = 1, n = 2, \text{ oder } m = 2, n = 1$$

sich ergeben, ersetzt werden müssen.

Es ist klar, dass die zu wählenden Normaltypen die sind, deren Knotenlinien in den ersten beiden Fällen der Fig. 32 dargestellt sind. In dem ersten Falle ist der von dem Gewicht herrührende Zuwachs der Periode gleich Null, und das ist der kleinste Werth, der eintreten kann; in dem zweiten Fall ist der Zuwachs der grösst möglichste. Ist β die Ordinate von M, so

wird die kinetische Energie in folgendem Verhältniss geändert:

$$\frac{\varrho}{2}\frac{a^2}{4} : \frac{\varrho}{2}\frac{a^2}{4} + \frac{M}{2} \sin^2 \frac{2\pi\beta}{a};$$

und daher:

$$p_{12}^2 : P_{12}^2 = 1 + \frac{4M}{a^2\varrho} \sin^2 \frac{2\pi\beta}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

während:

$$p_{21}^2 = P_{21}^2 = P_{12}^2.$$

Das für das Intervall zwischen den natürlichen Tonhöhen der belasteten Membran charakteristische Verhältniss ist daher angenähert:

$$1 + \frac{4M}{a^2\varrho} \sin^2 \frac{2\pi\beta}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wenn $\beta = \frac{1}{2}a$, wird keine von den beiden Perioden durch das Gewicht beeinflusst.

Als ein anderes Beispiel mag der Fall, wo die Werthe von m und n resp. 3 und 1 sind, erwähnt werden. Mit einem Gewicht in der Mitte sind die beiden auszuwählenden Normaltypen diejenigen, welche den beiden letzten Fällen der Fig. 34 entsprechen; bei dem ersteren derselben hat das Gewicht keinen Einfluss auf die Periode.

Das Problem, die Schwingung einer quadratischen Membran zu bestimmen, welche eine verhältnissmässig schwere Last trägt, ist schwieriger; wir wollen die Lösung desselben nicht versuchen. Es ist aber wohl werth, daran zu erinnern, dass die thatsächliche Periode grösser wie jede ist, welche aus einer hypothetischen Schwingungsart, die von der wirklich vorhandenen abweicht, berechnet werden kann.

*199. Die vorhergehende Theorie von quadratischen Membranen enthält ein gut Theil mehr wie das, was zunächst beabsichtigt war. Wo überhaupt bei einem schwingenden System gewisse Theile in Ruhe bleiben, da kann man diese immer als absolut fest annehmen; wir erhalten so auch Lösungen von anderen Fragen, wie die ursprünglich aufgeworfenen. Z. B. er-

halten wir in dem vorliegenden Fall immer dort, wo eine Diagonale des Quadrates eine Knotenlinie ist, gleichzeitig eine Lösung, die sich auf eine Membran anwenden lässt, deren feste Begrenzung ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ist. Ueberdies entspricht jede bei einem Dreieck mögliche Schwingungsart irgend einer natürlichen Schwingungsart des Quadrates, wie man leicht sieht, wenn man zwei Dreiecke sich aneinandergesetzt denkt, deren Schwingungen einander gleich und in den Punkten entgegengesetzt sind, welche als gegenseitige Bilder in Bezug auf die gemeinschaftliche Hypothenuse aufgefasst werden können. Unter diesen Umständen ist es klar, dass die Hypothenuse ohne Gebundenheit in Ruhe bleibt, und dass daher die fragliche Schwingung sich unter denjenigen befindet, die überhaupt ein vollständiges Quadrat annehmen kann.

Die Schwingungszahl des tiefsten Tones für ein Dreieck findet man, wenn in der Formel:

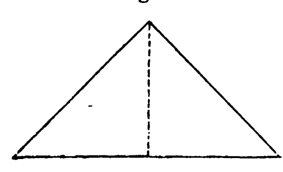
$$\frac{p}{2\pi} = \frac{c}{2a}\sqrt{m^2 + n^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$m = 1$, $n = 2$ gesetzt wird, sie ist demnach gleich $\frac{c\sqrt{5}}{2a}$.

Der nächst höhere Ton tritt ein, wenn $m = 3$, $n = 1$. In diesem Falle haben wir:

$$\frac{p}{2\pi} = \frac{c\sqrt{10}}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Fig. 37.



Es hätte dies ebenfalls aus der Bemerkung entnommen werden können, dass das Dreieck sich dabei selbst in zwei andere theilt, Fig. 37, deren Seiten in dem Verhältniss von $\sqrt{2} : 1$ kleiner, wie die des ganzen Dreiecks sind.

Wegen der Theorie der Schwingungen einer Membran, deren Begrenzung die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat, verweise ich den Leser auf Lame's *Leçons sur l'élasticité.* Es wird dort bewiesen, dass die Schwingungszahl des tiefsten

Tones $c : h$ ist, worin h die Höhe des Dreiecks bedeutet; es ist dieses dieselbe Schwingungszahl wie die des tiefsten Tones eines Quadrates, dessen Diagonale h ist.

200. Ist die feste Begrenzung der Membran kreisförmig, so ist der erste Schritt zu der Lösung des Problems die Einführung der Polarcoordinaten in die allgemeine Differentialgleichung. Dies kann analytisch geschehen, indessen ist es einfacher, die Polargleichung von Anfang an wieder abzuleiten, indem man die Kräfte ins Auge fasst, welche auf das Polarelement der Fläche $r d\vartheta dr$ wirken. Wie in §. 194 ist die rücktreibende Kraft, die auf ein kleines Flächenstück der Membran wirkt:

$$-T_1 \int \frac{dw}{dn} ds = -T_1 \left\{ \frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr} r d\vartheta\right) dr + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dw}{r d\vartheta} dr\right) d\vartheta \right\}$$

$$= -T_1 . r d\vartheta dr \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d\vartheta^2} \right\};$$

daher lautet, wenn wie vorher $T_1 : \varrho = c^2$, die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = c^2 \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d\vartheta^2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die hinzutretende Bedingung, welche an der Grenze erfüllt werden muss, ist die, dass $w = 0$, wenn $r = a$.

Um die Normalschwingungscomponenten aufzusuchen, haben wir zunächst anzunehmen, dass w eine harmonische Function der Zeit ist. Daher erscheint, wenn $w \propto \cos.(pt - \varepsilon)$, und wenn wir der Kürze halber $p : c = \varkappa$ setzen, die Differentialgleichung in der Form:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d\vartheta^2} + \varkappa^2 w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin $\varkappa$ der reciproke Werth einer linearen Grösse ist.

Wir können nun w, welches auch die Art der Abhängigkeit dieser Grösse von r und ϑ ist, stets nach der Fourier'schen Reihe entwickeln:

$$w = w_0 + w_1 \cos(\vartheta + \alpha_1) + w_2 \cos 2(\vartheta + \alpha_2) + \ldots (3),$$

worin w_0, w_I etc. Functionen von r, aber nicht von ϑ sind. Das Resultat der Einsetzung dieser Reihe in (2) mag geschrieben werden:

$$\sum\left\{\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_n}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) w_n\right\} \cos n\,(\vartheta + \alpha_n) = 0,$$

wobei sich die Summation über alle ganzzahligen Werthe von n erstreckt. Multipliciren wir diese Gleichung mit $\cos n\,(\vartheta + \alpha_n)$ und integriren nach ϑ zwischen 0 und 2π, so sehen wir, dass jedes Glied einzeln verschwinden muss; wir erhalten daher zur Bestimmung von w_n als Function von r:

$$\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) w_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wobei es gleichgültig ist, ob der Factor $\cos n\,(\vartheta + \alpha_n)$ in w_n enthalten gedacht wird oder nicht.

Die Lösung von (4) enthält zwei verschiedene Functionen von r, eine jede derselben multiplicirt mit einer willkürlichen Constanten. Indessen wird eine dieser Functionen unendlich, wenn r verschwindet, die entsprechende Particularlösung muss daher ausgeschlossen werden, weil sie den vorgeschriebenen Bedingungen im Anfangspunkt der Coordinaten nicht genügt. Dieser Punkt wird noch näher beleuchtet, wenn man zu der einfacheren Gleichung greift, die sich aus (4) durch Verschwindenlassen von $\varkappa$ und n ergiebt; die fragliche Lösung reducirt sich dann auf $w = \log r$, welche indessen im Anfangspunkt der Bedingung $\Delta^2 w$ nicht genügt. Man kann sich hiervon leicht aus dem Werthe von $\int \frac{dw}{dn}\,ds$ überzeugen, welches Integral rund um einen kleinen Kreis mit dem Anfangspunkt als Centrum integrirt wird. Auf gleiche Weise ist das vollständige Integral von (4) für unsern gegenwärtigen Zweck zu allgemein, da dasselbe den Fall verdeckt, bei welchem der Mittelpunkt der Membran einer äussern Kraft ausgesetzt ist.

Die andere Function von r, welche (4) genügt, ist die durch $J_n(\varkappa r)$ bezeichnete Bessel'sche Function $n$ter Ordnung und kann auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Die

nach steigenden Potenzen geordnete Reihe (welche unmittelbar aus der Differentialgleichung erhalten wird) lautet:

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2.2n+2} + \frac{z^4}{2.4.2n+2.2n+4} - \frac{z^6}{2.4.6.2n+2.2n+4.2n+6} + \cdots \right\} \quad (5),$$

woraus sich leicht folgende Beziehungen zwischen Functionen von auf einander folgender Ordnung ableiten lassen:

$$J_0'(z) = -J_1(z) \quad \ldots \quad (6),$$

$$2 J_n'(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \quad \ldots \quad (7),$$

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \quad \ldots \quad (8).$$

Ist n eine ganze Zahl, so kann $J_n(z)$ durch das bestimmte Integral:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \omega - n\omega)\, d\omega \quad \ldots \quad (9)$$

ausgedrückt werden, das Bessel's ursprüngliche Form ist. Aus diesem Ausdruck geht klar hervor, dass J_n und seine Differentialquotienten mit Bezug auf z stets kleiner wie Eins sind.

Die aufsteigende Reihe (5) convergirt, obgleich sie ohne Ende ist, für alle Werthe von n und z; indessen beginnt, wenn z gross ist, die Convergenz erst nach Berücksichtigung von vielen Gliedern und deshalb ist dann die Reihe für numerische Berechnung unbrauchbar. In solchen Fällen kann man die obige Reihe mit Vortheil durch eine andere Reihe, die nach abnehmenden Potenzen von z geordnet ist, ersetzen. Diese Reihe lautet:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ 1 - \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)}{1.2.(8z)^2} + \cdots \right\} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{1^2 - 4n^2}{1.8z} - \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2)}{1.2.3.(8z)^3} + \cdots \right\} \cdot \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots \quad (10);$$

dieselbe endigt, wenn $2n$ gleich einer ungeraden ganzen Zahl ist, sonst geht sie ohne Ende fort und wird schliesslich divergent. Nichtsdestoweniger kann, wenn z gross ist, der convergente Theil zur Berechnung benutzt werden; denn es lässt sich nachweisen, dass die Summe irgend einer Anzahl von Gliedern von dem wirklichen Werth der Function um weniger als das letzte mit einbegriffene Glied abweicht. Wir werden später in Verbindung mit einem andern Problem Gelegenheit haben, die Entwickelung dieser absteigenden Reihe zu betrachten.

Da die Bessel'schen Functionen in der theoretischen Akustik von hervorragender Wichtigkeit sind, so habe ich es für zweckmässig gehalten, eine Tabelle für die Functionen J_0 und J_1 zu geben, die dem Lommel'schen Werke [1]) entnommen sind und ursprünglich von Hansen herrührt. Die Functionen J_0 und J_1 sind durch die Relation verknüpft:

$$J_0' = - J_1.$$

z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	z	$J_0(z)$	$J_1(z)$
0,0	1,0000	0,0000	1,5	0,5118	0,5579
0,1	0,9975	0,0499	1,6	0,4554	0,5699
0,2	0,9900	0,0995	1,7	0,3980	0,5778
0,3	0,9776	0,1483	1,8	0,3400	0,5815
0,4	0,9604	0,1960	1,9	0,2818	0,5812
0,5	0,9385	0,2423	2,0	0,2239	0,5767
0,6	0,9120	0,2867	2,1	0,1666	0,5683
0,7	0,8812	0,3290	2,2	0,1104	0,5560
0,8	0,8463	0,3688	2,3	0,0555	0,5399
0,9	0,8075	0,4060	2,4	+ 0,0025	0,5202
1,0	0,7652	0,4401	2,5	− 0,0484	0,4971
1,1	0,7196	0,4709	2,6	0,0968	0,4708
1,2	0,6711	0,4983	2,7	0,1424	0,4416
1,3	0,6201	0,5220	2,8	0,1850	0,4097
1,4	0,5669	0,5419	2,9	0,2243	0,3754

[1]) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig, 1868.

z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	z	$J_0(z)$	$J_1(z)$
3,0	— 0,2601	0,3391	6,3	0,2238	— 0,2081
3,1	0,2921	0,3009	6,4	0,2433	0,1816
3,2	0,3202	0,2613	6,5	0,2601	0,1538
3,3	0,3443	0,2207	6,6	0,2740	0,1250
3,4	0,3643	0,1792	6,7	0,2851	0,0953
3,5	0,3801	0,1374	6,8	0,2931	0,0652
3,6	0,3918	0,0955	6,9	0,2981	0,0349
3,7	0,3992	0,0538	7,0	0,3001	— 0,0047
3,8	0,4026	+ 0,0128	7,1	0,2991	+ 0,0252
3,9	0,4018	— 0,0272	7,2	0,2951	0,0543
4,0	0,3972	0,0660	7,3	0,2882	0,0826
4,1	0,3887	0,1033	7,4	0,2786	0,1096
4,2	0,3766	0,1386	7,5	0,2663	0,1352
4,3	0,3610	0,1719	7,6	0,2516	0,1592
4,4	0,3423	0,2028	7,7	0,2346	0,1813
4,5	0,3205	0,2311	7,8	0,2154	0,2014
4,6	0,2961	0,2566	7,9	0,1944	0,2192
4,7	0,2693	0,2791	8,0	0,1717	0,2346
4,8	0,2404	0,2985	8,1	0,1475	0,2476
4,9	0,2097	0,3147	8,2	0,1222	0,2580
5,0	0,1776	0,3276	8,3	0,0960	0,2657
5,1	0,1443	0,3371	8,4	0,0692	0,2708
5,2	0,1103	0,3432	8,5	0,0419	0,2731
5,3	0,0758	0,3460	8,6	+ 0,0146	0,2728
5,4	0,0412	0,3453	8,7	— 0,0125	0,2697
5,5	— 0,0068	0,3414	8,8	0,0392	0,2641
5,6	+ 0,0270	0,3343	8,9	0,0653	0,2559
5,7	0,0599	0,3241	9,0	0,0903	0,2453
5,8	0,0917	0,3110	9,1	0,1142	0,2324
5,9	0,1220	0,2951	9,2	0,1367	0,2174
6,0	0,1506	0,2767	9,3	0,1577	0,2004
6,1	0,1773	0,2559	9,4	0,1768	0,1816
6,2	0,2017	0,2329	9,5	0,1939	0,1613

z	$J_0(z)$	$J_1(z)$	z	$J_0(z)$	$J_1(z)$
9,6	— 0,2090	0,1395	11,6	0,0446	0,2320
9,7	0,2218	0,1166	11,7	— 0,0213	0,2333
9,8	0,2323	0,0928	11,8	+ 0,0020	0,2323
9,9	0,2403	0,0684	11,9	0,0250	0,2290
10,0	0,2459	0,0435	12,0	0,0477	0,2234
10,1	0,2490	+ 0,0184	12,1	0,0697	0,2157
10,2	0,2496	— 0,0066	12,2	0,0908	0,2060
10,3	0,2477	0,0313	12,3	0,1108	0,1943
10,4	0,2434	0,0555	12,4	0,1296	0,1807
10,5	0,2366	0,0789	12,5	0,1469	0,1655
10,6	0,2276	0,1012	12,6	0,1626	0,1487
10,7	0,2164	0,1224	12,7	0,1766	0,1307
10,8	0,2032	0,1422	12,8	0,1887	0,1114
10,9	0,1881	0,1604	12,9	0,1988	0,0912
11,0	0,1712	0,1768	13,0	0,2069	0,0703
11,1	0,1528	0,1913	13,1	0,2129	0,0489
11,2	0,1330	0,2039	13,2	0,2167	0,0271
11,3	0,1121	0,2143	13,3	0,2183	— 0,0052
11,4	0,0902	0,2225	13,4	0,2177	+ 0,0166
11,5	0,0677	0,2284			

201. In Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise für die Bessel'schen Functionen kann daher der Ausdruck für eine Normalschwingungscomponente geschrieben werden:

$$w = P J_n(\varkappa r) \cos n(\vartheta + \alpha) \cos(pt + \varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

die Grenzbedingung erfordert, dass:

$$J_n(\varkappa a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

eine Gleichung, deren Wurzeln die zulässigen Werthe von $\varkappa$ und daher auch von p giebt.

Der vollständige Ausdruck für w wird erhalten, indem man die in (1) enthaltenen particulären Lösungen mit allen zulässigen Werthen von $\varkappa$ und n addirt; er ist nothwendiger Weise allgemein genug, um jeden möglichen Anfangszustand,

den man sich nur denken kann, wiederzugeben. Wir schliessen hieraus, dass jede Function von r und ϑ innerhalb der Grenzen des Kreises $r = a$ in die folgende Reihe entwickelt werden kann:

$$w = \Sigma\Sigma J_n(\varkappa r) \{\varphi \cos n\vartheta + \psi \sin n\vartheta\} \quad . \; . \; . \quad (3).$$

Für jeden ganzen Werth von n giebt es eine Reihe von Werthen von $\varkappa$, die durch (2) gegeben sind; für jeden dieser letzteren Werthe sind die Constanten φ und ψ willkürlich.

Die Bestimmung der Constanten wird auf die gewöhnliche Weise ausgeführt. Da die Energie der Bewegung gleich:

$$\frac{1}{2} \varrho \int_0^a \int_0^{2\pi} \dot{w}^2 r \, d\vartheta dr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

ist, und da dieselbe, wenn man sie mit Hülfe von Normalcoordinaten ausdrückt, nur die Quadrate der letzteren enthalten kann, so folgt, dass das Product von je zwei Gliedern in (3) verschwindet, wenn dasselbe über die Fläche des Kreises integrirt wird. Daher ergiebt sich, wenn (3) mit $J_n(\varkappa r) \cos n\vartheta$ multiplicirt und dann integrirt wird:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} w J_n(\varkappa r) \cos n\vartheta \, r dr \, d\vartheta$$

$$= \varphi \int \int [J_n(\varkappa r)]^2 \cos^2 n\vartheta \, r dr d\vartheta$$

$$= \varphi . \pi \int_0^a [J_n(\varkappa r)]^2 \, r dr \quad . \; . \; . \quad (5),$$

wodurch φ bestimmt ist. Man erhält die entsprechende Formel für ψ, wenn man $\sin n\vartheta$ für $\cos n\vartheta$ schreibt. Eine Methode, um den Werth des Integrals auf der rechten Seite zu ermitteln, wird gleich gegeben werden. Da φ und ψ jedes zwei Glieder enthält, eins, das mit $\cos pt$ variirt und das andere mit $\sin pt$, so liegt es jetzt auf der Hand, wie die Lösung immer so angepasst werden kann, dass sie mit beliebigen Anfangswerthen von w und $\dot{w}$ zusammenfällt.

202. Wir wollen jetzt specieller den Charakter der Fundamentalschwingung untersuchen. Ist $n = 0$, so ist w eine

Function von r allein, das heisst, die Bewegung ist mit Rücksicht auf den Mittelpunkt der Membran symmetrisch. Die Knotenlinien, wenn solche vorhanden, sind concentrische Kreise, deren Gleichung ist:

$$J_0 (\varkappa r) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hat n einen ganzen von Null verschiedenen Werth, so ist w eine Function sowohl von ϑ wie von r; die Gleichung des Systems der Knotenlinien nimmt die Form an:

$$J_n (\varkappa r) \cos n (\vartheta - \alpha) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Das System der Knotenlinien lässt sich daher in zwei Theile theilen, von denen der erste aus concentrischen Kreisen besteht, die dargestellt werden durch:

$$J_n (\varkappa r) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

und der zweite aus den Durchmessern:

$$\vartheta = \alpha + (2m + 1) \frac{\pi}{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

worin m eine ganze Zahl ist. Von diesen Diametern sind n vorhanden, welche gleichmässig rund um den Mittelpunkt angeordnet sind; in sonstiger Hinsicht ist ihre Lage willkürlich. Die Radien der kreisförmigen Knotenlinien werden später untersucht.

203. Die wichtige Integralformel:

$$\int_0^a J_n (\varkappa r) \, J_n (\varkappa' r') \, r \, dr = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin $\varkappa$ und $\varkappa'$ verschiedene Wurzeln von:

$$J_n (\varkappa a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sind, kann analytisch mit Hülfe der durch $J_n (\varkappa r)$, $J_n (\varkappa' r)$ erfüllten Differentialgleichungen nachgewiesen werden. Es ist indessen einfacher und instructiver mit dem allgemeineren Problem zu beginnen, bei welchem die Begrenzung der Membran nicht auf einen Kreis beschränkt ist.

Die Variationsgleichung der Bewegung lautet:

$$\delta V + \varrho \int\int \ddot{w}\, \delta w\, dx\, dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin:

$$V = \frac{1}{2} T_1 \int\int \left\{ \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 \right\} dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

und daher:

$$\delta V = T_1 \int\int \left\{ \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx} + \frac{dw}{dy} \frac{d\delta w}{dy} \right\} dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

In diesen Gleichungen bezieht sich w auf die wirkliche Bewegung und δw auf eine hypothetische Verschiebung, die sich mit den Bedingungen, denen das System unterworfen ist, verträgt. Wir wollen nun annehmen, dass das System eine von seinen Normalschwingungscomponenten ausführt, so dass $w = u$ und

$$\ddot{u} + p^2 u = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

während δw einer andern Normalfunction v proportional ist.

Da $\varkappa = p : c$, so erhalten wir aus (3):

$$\varkappa^2 \int\int u v\, dx\, dy = \int\int \left\{ \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{dv}{dy} \right\} dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Das Integral rechter Hand ist in Bezug auf u und v symmetrisch, daher:

$$(\varkappa'^2 - \varkappa^2) \int\int u v\, dx\, dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

worin zwischen $\varkappa'^2$ und v dieselbe Beziehung herrscht wie zwischen $\varkappa^2$ und u.

Demgemäss ist, wenn die durch u und v dargestellten Normalschwingungen verschiedene Perioden besitzen:

$$\int\int u v\, dx\, dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Bei Ableitung dieses Resultates haben wir keinerlei Annahme über die Bedingungen an der Begrenzung gemacht ausser der, welche in der Abwesenheit von Reactionskräften gegen Beschleunigung liegt, die, wenn sie existirte, in der Fundamentalgleichung (3) auftreten würde.

Nehmen wir in (8) $\varkappa' = \varkappa$ an, so wird die Gleichung identisch erfüllt, wir können dann aus derselben nicht auf den Werth von $\int\int u^2\, dx\, dy$ schliessen. Um in diesem Falle den

Werth dieses Integrals zu ermitteln, müssen wir einen etwas andern Weg einschlagen.

Sind u und v Functionen, die innerhalb eines gewissen Bereiches die Gleichungen: $\nabla^2 u + \varkappa^2 u = 0$, $\nabla^2 v + \varkappa'^2 v = 0$ erfüllen, so haben wir nach dem Green'schen Satz:

$$(\varkappa'^2 - \varkappa^2)\int\int uv\,dx\,dy = \int\int (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\,dx\,dy$$
$$= \int\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)ds \ldots (10).$$

Wir wollen nun annehmen, dass v von u durch eine kleine Aenderung von $\varkappa$ abgeleitet ist, so dass:

$$v = u + \frac{du}{d\varkappa}\delta\varkappa,\ \varkappa' = \varkappa + \delta\varkappa;$$

wir finden nach Substitution in (10):

$$2\varkappa\int\int u^2\,dx\,dy = \int\left(\frac{du}{d\varkappa}\frac{du}{dn} - u\frac{d^2u}{dn\,d\varkappa}\right)ds \ldots (11),$$

oder, wenn u an der Begrenzung verschwindet:

$$2\varkappa\int\int u^2\,dx\,dy = \int\frac{du}{d\varkappa}\frac{du}{dn}\,ds. \ldots\ldots (12).$$

Bei der Anwendung auf eine kreisförmige Fläche vom Radius r haben wir:

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos n\vartheta\, J_n(\varkappa r) \\ v &= \cos n\vartheta\, J_n(\varkappa' r)\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Daher aus (10) nach Einsetzen von Polarcoordinaten und Integration in Bezug auf ϑ:

$$(\varkappa'^2 - \varkappa^2)\int_0^r J_n(\varkappa r)\, J_n(\varkappa' r)\, r\,dr$$

$$= rJ_n(\varkappa r)\frac{d}{dr}J_n(\varkappa' r) - rJ_n(\varkappa' r)\frac{d}{dr}J_n(\varkappa r) \ldots (14).$$

Demnach ist, wenn:

$$\frac{d}{dr}J_n(\varkappa' r) : J_n(\varkappa' r) = \frac{d}{dr}J_n(\varkappa r) : J_n(\varkappa r)$$

und $\varkappa$ und $\varkappa'$ von einander verschieden sind:

$$\int_0^r J_n(\varkappa r)\, J_n(\varkappa' r)\, r\, dr = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

eine Gleichung, welche zuerst von Fourier für den Fall, dass:

$$J_n(\varkappa r) = J_n(\varkappa' r) = 0$$

ist, bewiesen wurde.

Andererseits folgt aus (12):

$$2\varkappa \int_0^r J_n^2(\varkappa r)\, r\, dr = r\frac{dJ}{d\varkappa}\frac{dJ}{dr} - rJ\frac{d^2J}{dr\, d\varkappa}$$

$$= \varkappa r^2 J'^2 - \varkappa r^2 J\left(J'' + \frac{1}{\varkappa r} J'\right),$$

worin die Accente Differentiationen in Bezug auf $\varkappa r$ bedeuten. Nun ist:

$$J'' + \frac{1}{\varkappa r} J' + \left(1 - \frac{n^2}{\varkappa^2 r^2}\right) J = 0,$$

und daher:

$$2\int_0^r J_n^2(\varkappa r)\, r\, dr = r^2 J_n'^2(\varkappa r) + r^2\left(1 - \frac{n^2}{\varkappa^2 r^2}\right) J_n^2(\varkappa r). \;.\;.\; (16).$$

Dieses Resultat ist allgemein. Wenn aber, wie bei der Anwendung auf Membranen mit fester Begrenzung:

$$J_n(\varkappa r) = 0,$$

so ist:

$$2\int_0^r J_n^2(\varkappa r)\, r\, dr = r^2 J_n'^2(\varkappa r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

204. Wir können das eben erhaltene Resultat dazu benutzen, die Ausdrücke für T und V zu vereinfachen. Aus

$$w = \Sigma\Sigma\left\{\varphi_{mn} J_n(\varkappa_{mn} r) \cos n\vartheta + \psi_{mn} J_n(\varkappa_{mn} r) \sin n\vartheta\right\} \;.\;.\;. (1),$$

ergiebt sich:

$$T = \frac{1}{4}\varrho\pi a^2 \Sigma\Sigma J_n'^2(\varkappa_{mn} a)\left\{\dot\varphi_{mn}^2 + \dot\psi_{mn}^2\right\} \;.\;.\;. (2),$$

$$V = \frac{1}{4}\,\varrho\pi a^2 \Sigma\Sigma p_{mn}^2 J_n'^2(\varkappa_{mn}a)\,\{\varphi_{mn}^2 + \psi_{mn}^2\} \ldots (3),$$

woraus als Normalbewegungsgleichung folgt:

$$\ddot\varphi_{mn} + p_{mn}^2\varphi_{mn} = \frac{4\,\Phi_{mn}}{\varrho\pi a^2 J_n'^2(\varkappa_{mn}a)} \quad \ldots \quad (4)$$

und eine analoge Gleichung für ψ_{mn}. Der Werth von Φ_{mn} ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass $\Phi_{mn}\,\delta\varphi_{mn}$ die während einer hypothetischen Verschiebung $\delta\varphi_{mn}$ von den äusseren Kräften geleistete Arbeit ist, so dass wir, wenn Z die auf die Flächeneinheit wirkende äussere Kraft ist, haben:

$$\Phi_{mn} = \int\!\!\int Z J_n(\varkappa_{mn} r)\cos n\vartheta\; r\,dr\,d\vartheta \quad \ldots \quad (5).$$

Diese Ausdrücke und Gleichungen finden keine Anwendung bei dem Fall $n = 0$, wo φ und ψ in einander übergehen. Wir haben dann:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\,\varrho\pi a^2 J_0'^2(\varkappa_{m0}a)\,\dot\varphi_{m0}^2 \\ V &= \frac{1}{2}\,\varrho\pi a^2 p_{m0}^2 J_0'^2(\varkappa_{m0}a)\,\varphi_{m0}^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6),$$

$$\ddot\varphi_{m0} + p_{m0}^2\varphi_{m0} = \frac{2\,\Phi_{m0}}{\varrho\pi a^2 J_0'^2(\varkappa_{m0}a)} \quad \ldots \quad (7).$$

Als ein Beispiel wollen wir annehmen, dass die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind und dass der Anfangszustand der ist, welcher unter der Wirkung eines constanten Druckes Z eintritt. Daraus ergiebt sich:

$$\Phi_{m0} = Z \,.\, 2\pi \int_0^a J_0(\varkappa_{m0} r)\, r\,dr.$$

Nun ist nach der Differentialgleichung:

$$r J_0(\varkappa r) = -\left\{ r J_0''(\varkappa r) + \frac{1}{\varkappa} J_0'(\varkappa r)\right\},$$

und daher:

$$\int_0^a J_0(\varkappa r)\, r\,dr = -\frac{a}{\varkappa} J_0'(\varkappa a) \quad \ldots \quad (8),$$

so dass:

$$\Phi_{m0} = -\frac{2\pi a}{\varkappa_{m0}} Z J_0'(\varkappa_{m0} a).$$

Setzen wir diesen Werth in (7) ein, so finden wir für den Anfangswerth von φ_{m0}:

$$(\varphi_{m0})_{t=0} = \frac{-4Z}{\varkappa_{m0} p_{m0}^2 \varrho a J_0'(\varkappa_{m0} a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Für Werthe von n, die von Null verschieden sind, verschwinden Φ und der Anfangswerth von φ_{mn}. Der Zustand des Systems zur Zeit t wird ausgedrückt durch:

$$\varphi_{m0} = (\varphi_{m0})_{t=0} \cdot \cos p_{m0} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

$$w = \Sigma \varphi_{m0} J_0(\varkappa_{m0} r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wobei sich die Summation über alle zulässigen Werthe von $\varkappa_{m0}$ erstreckt.

Als ein Beispiel einer erzwungenen Schwingung nehmen wir etwa an, dass Z, welches in Bezug auf den Raum noch constant sein soll, sich wie eine harmonische Function der Zeit ändert. Es mag dieses als eine rohe Darstellung für den Zustand einer kleinen Membran gelten, welche durch einen Zug von Luftwellen in Bewegung gesetzt wird. Ist $Z = \cos pt$, so finden wir nahezu wie vorher:

$$w = \frac{4}{\varrho a} \cos pt \sum \frac{J_0(\varkappa_0 r)}{\varkappa_{m0}(q^2 - p_{m0}^2) J_0'(\varkappa_{m0} a)} \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die erzwungene Schwingung ist natürlich von ϑ unabhängig. Wir werden sehen, dass, während keine der symmetrischen Normalcomponenten verloren geht, doch die relative Bedeutung derselben sehr variiren kann, speciell, wenn zwischen q und einer der Grössen aus der Reihe der Grössen p_{m0} eine grosse Annäherung herrscht. Ist die Annäherung sehr gross, so muss die Wirkung von dissipativen Kräften mit in Rechnung gezogen werden.

205. Die Tonhöhen der verschiedenen einfachen Töne und die Radien der kreisförmigen Knotenlinien hängen von den Wurzeln der folgenden Gleichung ab:

$$J_n(\varkappa a) = J_n(z) = 0.$$

Werden diese Wurzeln (mit Ausnahme der Null) nach ihrer Grösse geordnet genannt: $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, z_n^{(3)} \ldots z_n^{(s)} \ldots$, so findet man die zulässigen Werthe von p, indem man die Grössen $z_n^{(s)}$ mit $c:a$ multiplicirt. Die particuläre Lösung kann dann geschrieben werden:

$$w = J_n\left(z_n^{(s)}\frac{r}{a}\right)\{A_n^{(s)}\cos n\vartheta + B_n^{(s)}\sin n\vartheta\}\cos\left\{\frac{c}{a}z_n^{(s)}t - \varepsilon_n^{(s)}\right\} \quad (1).$$

Der niedrigste Ton der Gruppe n entspricht $z_n^{(1)}$; da in diesem Falle $J_n\left(z_{n(1)}\frac{r}{a}\right)$ für keinen der Werthe von r kleiner wie a verschwindet, so ist im Innern keine kreisförmige Knotenlinie vorhanden. Setzen wir $s = 2$, so verschwindet J_n, wenn:

$$z_n^{(2)}\frac{r}{a} = z_n^{(1)},$$

das ist, wenn

$$r = a\frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}};$$

diese Gleichung giebt also den Radius des einzigen Knotenkreises im Innern. Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn wir die Wurzel $z_n^{(s)}$ nehmen, eine Schwingung mit $s - 1$ Knotenkreisen (mit Ausschluss der Begrenzung), deren Radien sind resp.:

$$a\frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(s)}},\quad a\frac{z_n^{(2)}}{z_n^{(s)}},\ \ldots\ a\frac{z_n^{(s-1)}}{z_n^{(s)}}.$$

Alle Wurzeln der Gleichung $J_n(\varkappa a) = 0$ sind reel. Es möge nämlich, wenn imaginäre Wurzeln möglich wären, $\varkappa a = \lambda + i\mu$ eine Wurzel sein; da dann $\varkappa' a = \lambda - i\mu$ auch eine Wurzel wäre, so hätten wir nach (14) §. 203:

$$4i\lambda\mu\int_0^a J_n(\varkappa r)\,J_n(\varkappa' r)\,r\,dr = 0.$$

Nun sind $J_n(\varkappa r)$, $J_n(\varkappa' r)$ conjugirte complexe Grössen, deren Product nothwendiger Weise positiv ist, so dass die obige Gleichung erfordert, dass entweder λ oder μ verschwinden. Dass λ nicht verschwinden kann, geht aus der Ueberlegung hervor, dass, wenn $\varkappa a$ eine rein imaginäre Grösse ist,

jedes Glied der aufsteigenden Reihe für J_n positiv wäre, und dass deshalb die Summe der Reihe unmöglich verschwinden könnte. Wir schliessen hieraus, dass $\mu = 0$, oder dass $\varkappa$ reel ist [1]). Zu demselben Resultat hätte man durch die Ueberlegung kommen können, dass in dem analytischen Ausdruck für eine Normalschwingungscomponente nur Kreisfunctionen in Bezug auf die Zeit eintreten können.

Die Gleichung $J_n(z) = 0$ hat (Null ausgeschlossen) keine gleiche Wurzeln. Aus Gleichungen (7) und (8) §. 200 erhalten wir:

$$J_n' = \frac{n}{z} J_n - J_{n+1},$$

woraus wir entnehmen, dass, wenn J_n und J_n' für denselben Werth von z verschwinden würden, J_{n+1} für diesen Werth ebenfalls verschwinden müsste. Nach der Gleichung (8) §. 200 würde dieses aber verlangen, dass alle Functionen J_n für den fraglichen Werth von z verschwinden [2]).

206. Die wirklichen Werthe von z können durch Interpolation aus Hansen's Tabelle gefunden werden, so weit wie sich letztere erstreckt; oder es können aus der absteigenden Reihe durch die Methode der successiven Annäherung Formeln berechnet werden, welche die Wurzeln direct ausdrücken. Für den wichtigen Fall von symmetrischen Schwingungen ($n = 0$) lassen sich die Werthe von z_0 aus folgender von Stokes [3]) angegebenen Formel berechnen:

---

1) Riemann, S. 260.

2) Bourget, *Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires. Ann. de l'école normale, t.* III, 1866. An einer Stelle meint Bourget bewiesen zu haben, dass kein Paar von Bessel'schen Functionen von ganzer Ordnung dieselbe Wurzel haben kann; ich kann nicht finden, dass dieser Beweis wirklich geführt ist. Das Theorem ist indessen wahrscheinlich richtig. Für Functionen, deren Ordnungen um 1 oder 2 von einander abweichen, kann dasselbe leicht aus den Formeln von §. 200 bewiesen werden.

3) *Camb. Phil. Trans. Vol.* IX. „*On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series.*“

$$\frac{z_0^{(s)}}{\pi} = s - 0,25 + \frac{0,050661}{4s - 1} - \frac{0,053041}{(4s - 1)^3} + \frac{0,262051}{(4s - 1)} \cdot \cdot (1).$$

Für $n = 1$ lautet die Formel:

$$\frac{z_1^{(s)}}{\pi} = s + 0,25 - \frac{0,151982}{4s + 1} + \frac{0,015399}{(4s + 1)^3} - \frac{0,245835}{(4s + 1)^5} \cdot \cdot (2).$$

Die letzte Reihe ist convergent genug, selbst für die erste Wurzel, welche $s = 1$ entspricht. Die Reihe (1) genügt für alle Werthe von s, die grösser wie Eins sind; die erste Wurzel muss aber unabhängig für sich berechnet werden. Die nachfolgende Tabelle (A) ist der Arbeit von Stokes entnommen, mit einer kleinen Aenderung in der Bezeichnungsweise.

Entweder aus der Formel oder der Tabelle ergiebt es sich, dass die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Wurzeln von höherer Ordnung annähernd gleich π ist. Dies gilt für alle Werthe von n, wie direct aus der absteigenden Reihe (10) §. 200 folgt.

Hr. Bourget hat in seiner Arbeit mehrere mit grossem Fleiss berechnete Tabellen der Schwingungszahlen von verschiedenen einfachen Tönen und der Radien der Kreisknotenlinien gegeben. Tabelle B enthält die Werthe von z, welche $J_n(z)$ genügen, für $n = 0, 1, \ldots 5$, $s = 1, 2, \ldots 9$.

Tabelle A

s	$\frac{z}{\pi}$ für $J_0(z) = 0$.	Diff.	$\frac{z}{\pi}$ für $J_1(z) = 0$.	Diff.
1	0,7655	0,9916	1,2197	1,0133
2	1,7571	0,9975	2,2330	1,0053
3	2,7546	0,9988	3,2383	1,0028
4	3,7534	0,9993	4,2411	1,0017
5	4,7527	0,9995	5,2428	1,0011
6	5,7522	0,9997	6,2439	1,0009
7	6,7519	0,9997	7,2448	1,0006
8	7,7516	0,9998	8,2454	1,0005
9	8,7514	0,9999	9,2459	1,0004
10	9,7513	0,9999	10,2463	1,0003
11	10,7512	0,9999	11,2466	1,0003
12	11,7511		12,2469	

Nimmt n eine beträchtliche Grösse an, so wird die Berechnung der ersten Wurzel mühsam. Für sehr grosse Werthe von n nähert sich das Verhältniss $z_n^{(1)} : n$ der Einheit, wie man aus der Betrachtung schliessen kann, dass die Tonhöhe des tiefsten Tones eines sehr spitzen Kreissectors allmälig immer mehr mit der Höhe des Tones eines langen, von parallelen Seiten begrenzten Streifens, dessen Breite gleich der grössten Weite des Sectors ist, zusammenfallen muss.

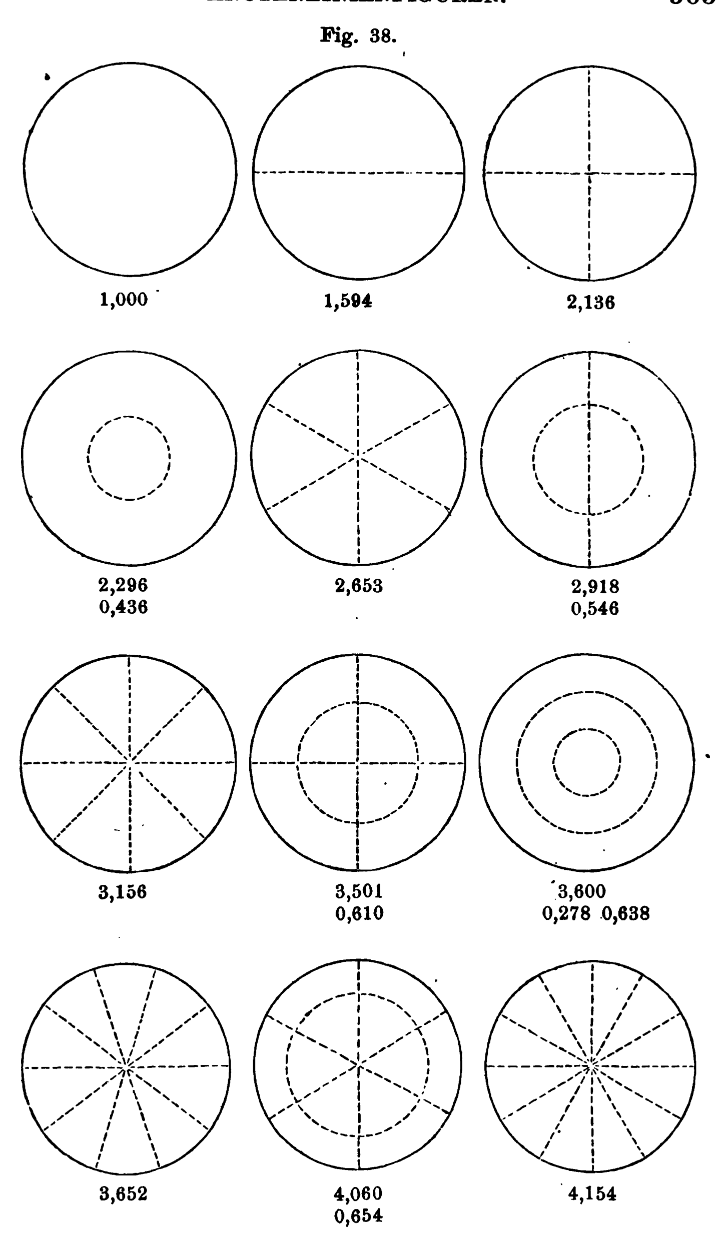
Tabelle B.

s	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	2,404	3,832	5,135	6,379	7,586	8,780
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
4	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982
5	14,931	16,470	17,960	19,410	20,827	22,220
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,018	25,431
7	21,212	22,760	24,270	25,749	27,200	28,628
8	24,353	25,903	27,421	28,909	30,371	31,813
9	27,494	29,047	30,571	32,050	33,512	34,983

Die Figuren stellen die wichtigeren Normalschwingungsarten dar; die angeschriebenen Zahlen geben die Schwingungszahl, wenn die des tiefsten Tones gleich Eins gesetzt wird, zusammen mit den als Bruchtheile des Radius der Membran ausgedrückten Radien der Kreisknotenlinien. In dem Falle von sechs Knotenlinien ist die angegebene Schwingungszahl das Resultat einer von mir angestellten, rohen Rechnung.

Die den verschiedenen Fundamentalschwingungsarten einer kreisförmigen Membran zugehörigen Töne gehören keiner harmonischen Reihe an; indessen finden sich doch zwischen ihnen ein oder zwei annähernd harmonische Relationen, welche erwähnenswerth sind. So ist:

Fig. 38.


1,000
1,594
2,136
2,296
0,436
2,653
2,918
0,546
3,156
3,501
0,610
3,600
0,278 0,638
3,652
4,060
0,654
4,154

$$\frac{4}{3} \,.\, 1{,}594 = 2{,}125 = 2{,}136 \text{ nahezu},$$

$$\frac{5}{3} \,.\, 1{,}594 = 2{,}657 = 2{,}653 \text{ nahezu},$$

$$2 \,.\, 1{,}594 = 3{,}188 = 3{,}156 \text{ nahezu},$$

so dass die vier tiefsten Schwingungsarten, die nur Durchmesser zu Knotenlinien haben, einen consonirenden Accord geben.

Die Fläche der Membran wird durch das System von Knotenlinien auf solche Weise in Segmente eingetheilt, dass das Zeichen der Schwingung jedesmal wechselt, wenn eine Knotenlinie gekreuzt wird. Bei den Schwingungsarten, die Durchmesser zu Knotenlinien haben, tritt offenbar keine Verschiebung des Schwerpunktes der Membran ein. Bei symmetrischen Schwingungen ist die Verschiebung des Schwerpunktes proportional:

$$\int_0^a J_0(\varkappa r)\, r\, dr = -\int_0^a \left\{ J_0''(\varkappa r) + \frac{1}{\varkappa r} J_0'(\varkappa r) \right\} r\, dr$$

$$= -\frac{a}{\varkappa} J_0'(\varkappa a),$$

ein Ausdruck, der für keinen der zulässigen Werthe von $\varkappa$ verschwindet, da $J_0'(z)$ und $J_0(z)$ nicht gleichzeitig verschwinden können. Bei allen symmetrischen Schwingungsarten findet demnach eine Verschiebung des Schwerpunktes der Membran statt.

207. Bis jetzt haben wir angenommen, dass die kreisförmige Fläche der Membran vollkommen mit Masse ausgefüllt und dass nur der Umfang fest ist. Es liegt aber auf der Hand, dass unsere Theorie thatsächlich auch die Lösungen von anderen Problemen enthält, z. B. einige Fälle einer von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Membran. Die vollständige Theorie einer ringförmigen Membran erfordert die zweite Bessel'sche Function.

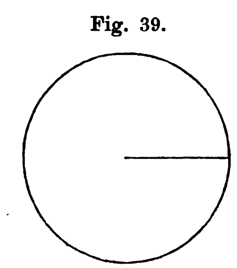
Das Problem einer halbkreisförmigen Membran können wir schon als gelöst ansehen, da jede Schwingungsart, welche der Halbkreis ausführen kann, auch auf den ganzen Kreis anwendbar sein muss. Um dieses einzusehen, ist es nur nöthig, jedem Punkte in dem complementären Halbkreis eine Bewegung zu ertheilen, welche derjenigen entgegengesetzt ist, die von dem optischen Spiegelbild dieses Punktes in Bezug auf den begrenzenden Durchmesser ausgeführt wird. Für die letztere Linie ist dann keine Gebundenheit nothwendig, um dieselbe als Knotenlinie zu erhalten. Aehnliche Betrachtungen lassen sich auf jeden Sector, dessen Winkel ein aliquoter Theil von zwei rechten Winkeln ist, anwenden.

Ist der Winkel des Sectors willkürlich, so kann das Problem in Werthen von Bessel'schen Functionen, mit gebrochenem Index gelöst werden. Sind die festen Radien $\vartheta = 0$, $\vartheta = \beta$, so lautet die particuläre Lösung:

$$w = P J_{\frac{\nu\pi}{\beta}}(\varkappa r) \sin \frac{\nu\pi\vartheta}{\beta} \cos(pt - \varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin ν eine ganze Zahl ist. Wir sehen, dass $\nu\pi : \beta$, wenn β ein aliquoter Theil von π ist, eine ganze Zahl darstellt, und dass die Lösung dann unter den für einen vollständigen Kreis aufgestellten schon enthalten ist.

Fig. 39.



Ein interessanter Fall ist der, wo $\beta = 2\pi$, welcher Fall dem Problem eines vollständigen Kreises entspricht, dessen Radius $\vartheta = 0$ wegen Gebundenheit zu einer Knotenlinie werden muss.

Wir haben:

$$w = P J_{\frac{1}{2}\nu}(\varkappa r) \sin \frac{1}{2} \nu\vartheta \cos(pt - \varepsilon).$$

Ist ν gerade, so giebt diese Gleichung, wie zu erwarten ist, Schwingungsarten, die ohne die Gebundenheit möglich sind; ist dagegen ν ungerade, so treten neue Arten auf. In der That hat in dem letzten Fall die absteigende Reihe

für J ein Ende, so dass die Lösung in endlichen Gliedern auszudrücken ist. Daher ist, wenn $\nu = 1$:

$$w = P \frac{\sin \varkappa r}{\sqrt{\varkappa r}} \sin \frac{1}{2} \vartheta \cos (pt - \varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Werthe von $\varkappa$ werden gegeben durch:

$$\sin \varkappa a = 0, \text{ oder } \varkappa a = m\pi.$$

Es theilen somit die kreisförmigen Knotenlinien den festen Radius in gleiche Theile und die Reihe der Töne bildet eine harmonische Scala. Bei der tiefsten Schwingungsart ist die Membran zu jeder Zeit ganz nach derselben Seite von ihrer Gleichgewichtslage aus ausgebogen. Es ist bemerkenswerth, dass die Anbringung der Gebundenheit bei dem Radius $\vartheta = 0$ das Problem leichter wie vorher macht.

Nehmen wir $\nu = 3$, so ist die Lösung:

$$w = P \frac{1}{\sqrt{\varkappa r}} \left(\frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} - \cos \varkappa r \right) \sin \frac{3}{2} \vartheta \cos (pt - \varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

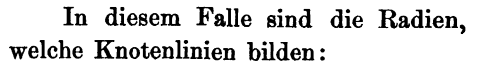


Fig. 40.

In diesem Falle sind die Radien, welche Knotenlinien bilden:

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3}, \quad \vartheta = \frac{4\pi}{3};$$

die möglichen Töne werden durch die Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tang} \varkappa a = \varkappa a \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Um die Wurzeln von $\operatorname{tang} x = x$ zu berechnen, können wir annehmen:

$$x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi - y = X - y,$$

wo y eine positive Grösse ist, welche klein ausfällt, wenn x gross.

Setzen wir dieses ein, so finden wir $\operatorname{cotg} y = X - y$, woraus:

$$y = \frac{1}{X}\left(1 + \frac{y}{X} + \frac{y^2}{X^2} + \cdots\right) - \frac{y^3}{3} - \frac{2y^5}{15} - \frac{17y^7}{315} - \cdots$$

Diese Gleichung muss durch successive Annäherung gelöst werden. Es ergiebt sich leicht, dass:

$$y = X^{-1} + \frac{2}{3} X^{-3} + \frac{13}{15} X^{-5} + \frac{146}{105} X^{-7} + \cdots,$$

so dass die Wurzeln von $tang\, x = x$ gegeben sind durch:

$$x = X - X^{-1} - \frac{2}{3} X^{-3} - \frac{13}{15} X^{-5} - \frac{146}{105} X^{-7} - \ldots \quad (5),$$

wo:

$$X = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi.$$

In dem ersten Quadranten giebt es nach Null keine Wurzel, da $tang\, x > x$; in dem zweiten Quadranten ist gar keine Wurzel vorhanden, da hier die Zeichen von x und $tang\, x$ einander entgegengesetzt sind. Die erste Wurzel nach Null liegt daher in dem dritten Quadranten, entsprechend $m = 1$. Selbst in diesem Falle convergirt die Reihe hinreichend, um den Werth dieser Wurzel mit hinlänglicher Genauigkeit zu geben, während auch noch für höhere Werthe von m die Genauigkeit genügend ist. Die wirklichen Werthe von $x : \pi$ sind: 1,4303, 2,4590, 3,4709, 4,4747, 5,4818, 6,4844 etc.

208. Die Einwirkung einer kleinen Ungleichheit in der Dichtigkeit der kreisförmigen Membran auf die Periode kann nach der allgemeinen Methode des §. 90 aufgesucht werden. Wir haben schon verschiedene Beispiele für die Anwendung dieser Methode gegeben. Es mag hier daher genügen, den Fall zu betrachten, wo ein kleines Gewicht M in einem Punkte, dessen Radiusvector r' ist, auf der Membran befestigt wird.

Wir wollen zunächst die symmetrischen Schwingungstypen ($n = 0$) vornehmen, deren Anwendbarkeit wir ungeachtet der Gegenwart von M annehmen dürfen. Die kinetische Energie T (6) §. 204 ändert sich dann von:

$$\frac{1}{2} \varrho \pi a^2 J_0'^2(\varkappa_{m0} a)\, \dot{\varphi}_{m0}^2 \text{ in } \frac{1}{2} \varrho \pi a^2 J_0'^2(\varkappa_{m0} a)\, \dot{\varphi}_{m0}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\varphi}_{m0}^2 J_0^2(\varkappa_{m0} r'),$$

und daher:

$$p_{m0}^2 : P_{m0}^2 = 1 - \frac{M}{\varrho \pi a^2} \frac{J_0^2(\varkappa_{m0} r')}{J_0'^2(\varkappa_{m0} a)} \quad . \; . \; . \quad (1),$$

wo P_{m0}^2 den Werth von p_{m0}^2 bedeutet, wenn kein Gewicht M vorhanden ist.

Die unsymmetrischen Normalschwingungstypen sind für die unbelastete Membran nicht völlig bestimmt, für den gegenwärtigen Zweck müssen dieselben aber so gewählt werden, dass sie die resultirende Periode zu einem Maximum oder Minimum machen, d. h. so, dass die Wirkung des Gewichtes die grösst- und kleinstmöglichste ist. Da nun eine Belastung nie die Tonhöhe steigern kann, so ist es klar, dass der Einfluss der Belastung der kleinstmöglichste, d. h. Null, ist, wenn der Schwingungstypus der Art ist, dass ein Knotendurchmesser (gleichgültig welcher) durch den Punkt geht, wo man das Gewicht angebracht hat. Man muss annehmen, dass die unbelastete Membran zwei zusammenfallende Perioden besitzt, von denen eine durch Hinzufügung des Gewichts nicht geändert wird. Der andere Typus ist so zu wählen, dass die Aenderung der Periode so gross wie möglich ausfällt, was augenscheinlich der Fall ist, wenn der Radiusvector r' den Winkel zwischen zwei neben einander liegenden Knotenliniendurchmessern halbirt. Daher haben wir, wenn r' dem Werthe $\vartheta = 0$ entspricht, zu nehmen:

$$w = \varphi_{mn} J_n(\varkappa_{mn} r) \cos n\vartheta;$$

so dass (2) §. 204 wird:

$$T = \frac{1}{4} \varrho \pi a^2 \dot{\varphi}_{mn}^2 J_n'^2(\varkappa_{mn} a) + \frac{1}{2} M \dot{\varphi}_{mn}^2 J_n^2(\varkappa_{mn} r').$$

Das geänderte p_{mn}^2 wird daher gegeben durch:

$$p_{mn}^2 : P_{mn}^2 = 1 - \frac{2M}{\varrho \pi a^2} \frac{J_n^2(\varkappa_{mn} r')}{J_n'^2(\varkappa_{mn} a)} \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Natürlich wird, wenn r' eine solche Grösse hat, dass das Gewicht auf einem der Knotenkreise liegt, keine von den beiden Perioden geändert.

Es möge M z. B. im Mittelpunkte der Membran liegen. $J_n(0)$ verschwindet, ausgenommen den Fall, dass $n = 0$;

$J_n(0)$ ist $= 1$. Nur bei den symmetrischen Schwingungen wird die Tonhöhe durch eine centrale Belastung beeinflusst, und hierfür ist nach (1):

$$p_{m0}^2 : P_{m0}^2 = 1 - \frac{M}{J_0'^2(\varkappa_{m0}\, a)\varrho\,\pi\, a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Nach (6) §. 200 ist:

$$J_0'(z) = -J_1(z),$$

so dass die Anwendung der Formel (3) nur eine Kenntniss der Werthe von $J_1(z)$ §. 200 verlangt, für den Fall, dass $J_0(z)$ verschwindet. Für die tiefste Schwingungsart ist der Werth von $J_0'(\varkappa_{m0}\, a)$ gleich 0,51903[1]). Hat $\varkappa_{m0}\, a$ einen beträchtlichen Werth, so ist annähernd:

$$J_1^2(\varkappa_{m0}\, a) = 2 : \pi\,\varkappa_{m0}\, a,$$

so dass für die höheren Componenten der Einfluss der Belastung auf die Aenderung der Tonhöhe wächst.

Der Einfluss einer kleinen Unregelmässigkeit auf die Störung des Systems von Knotenlinien kann aus den Formeln des §. 90 berechnet werden. Die augenfälligste Wirkung ist die Krümmung der Knotendurchmesser in eine hyperbolische Form, welche von der Einführung von untergeordneten symmetrischen Schwingungen herrührt. In vielen Fällen wird diese Störung begünstigt durch nahes Uebereinstimmen zwischen einigen der natürlichen Perioden.

209. Wir wollen jetzt untersuchen, in welcher Weise die natürlichen Schwingungen einer gleichförmigen Membran durch eine kleine Abweichung von einer genauen Kreisgestalt beeinflusst werden.

Welches auch die Art der Begrenzung ist, w genügt stets der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d w}{d r} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d \vartheta^2} + \varkappa^2 w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin $\varkappa$ eine zu bestimmende Constante ist. Nach dem Fourier'schen Satz lässt sich w in folgende Reihe entwickeln:

---

1) Die folgenden Werthe sind annähernd 0,341, 0,271, 0,232, 0,206, 0,187 etc.

$$w = w_0 + w_1 \cos(\vartheta + \alpha_1) + w_2 \cos 2(\vartheta + \alpha_2) + \cdots$$
$$+ w_n \cos n(\vartheta + \alpha_n) + \cdots,$$

worin w_0, w_1, etc. Functionen von r allein sind. Setzen wir diesen Werth in (1) ein, so erkennen wir, dass w_n der folgenden Differentialgleichung genügen muss:

$$\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_n}{dr} + \left(\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) w_n = 0,$$

deren Lösung ist:

$$w_n \propto J_n(\varkappa r);$$

denn es kann, wie in §. 200, die andere Function von r nicht auftreten.

Der allgemeine Ausdruck für w kann daher geschrieben werden:

$$w = A_0 J_0(\varkappa r) + J_1(\varkappa r)(A_1 \cos\vartheta + B_1 \sin\vartheta) + \cdots$$
$$+ J_n(\varkappa r)(A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für alle Punkte der Begrenzung muss w verschwinden.

Bei einer nahezu kreisförmigen Membran ist der Radiusvector nahezu constant. Wir können $r = a + \delta r$ setzen, wo δr eine kleine Function von ϑ ist. Daher lautet die Grenzbedingung:

$$0 = A_0 [J_0(\varkappa a) + \varkappa \delta r J_0'(\varkappa a)] + \cdots$$
$$+ [J_n(\varkappa a) + \varkappa \delta r J_n'(\varkappa a)][A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3),$$

welches für alle Werthe von ϑ gültig ist.

Wir wollen zunächst die Schwingungsarten betrachten, welche nahezu symmetrisch sind, für welche wir also annähernd haben:

$$w = A_0 J_0(\varkappa r).$$

Alle übrig bleibenden Coefficienten sind klein im Vergleich zu A_0, da die Schwingungsart nur wenig von derjenigen abweichen kann, welche eintreten würde, wenn die Begrenzung ein genauer Kreis wäre. Werden daher die Quadrate von kleinen Grössen vernachlässigt, so wird (3):

$$A_0[J_0(\varkappa a) + \varkappa \delta r J_0'(\varkappa a)] + J_1(\varkappa a)[A_1 \cos\vartheta + B_1 \sin\vartheta] + \cdots$$
$$+ J_n(\varkappa a)[A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta] + \cdots = 0 \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Integriren wir diese Gleichung nach ϑ zwischen den Grenzen 0 und 2π, so erhalten wir:

$$2\pi J_0(\varkappa a) + J_0'(\varkappa a)\int_0^{2\pi} \varkappa\,\delta r\,d\vartheta = 0,$$

oder:

$$J_0\left\{\varkappa a + \varkappa\int_0^{2\pi} dr\frac{d\vartheta}{2\pi}\right\} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

welches zeigt, dass die Tonhöhe der Schwingung annähernd dieselbe ist, als wenn der Radiusvector über der ganzen Ausdehnung gleichförmig seinen Mittelwerth hätte.

Dieses Resultat gestattet uns eine rohe Schätzung der Tonhöhe einer jeden Membran vorzunehmen, deren Begrenzung nicht ausserordentlich verlängert ist. Bedeutet σ die Fläche, so dass $\varrho\,\sigma$ die Masse der ganzen Membran ist, so ist die Schwingungszahl des tiefsten Tones annähernd:

$$2\pi \times 2{,}404 \times \sqrt{\frac{\pi T_1}{\sigma\varrho}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Um den geänderten Schwingungstypus aufzusuchen, wollen wir (4) mit $\cos n\vartheta$, oder $\sin n\vartheta$ multipliciren und dann wie vorher integriren. Daher:

$$\left.\begin{aligned} A_0 J_0'(\varkappa a)\int_0^{2\pi} \varkappa\,\delta r \cos n\vartheta\, d\vartheta + \pi A_n J_n(\varkappa a) = 0 \\ A_0 J_0'(\varkappa a)\int_0^{2\pi} \varkappa\,\delta r \sin n\vartheta\, d\vartheta + \pi B_n J_n(\varkappa a) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (7),$$

durch welche Gleichungen die Verhältnisse $A_n : A_0$ und $B_n : A_0$ bestimmt werden.

Ist nach der Fourier'schen Entwickelung:

$$\delta r = \delta r_0 + \delta r_1 + \cdots + \delta r_n + \cdots$$

so kann der schliessliche Ausdruck für w geschrieben werden:

$$w : A_0 = J_0(\varkappa r)$$
$$-\varkappa J_0'(\varkappa a)\left\{\frac{J_1(\varkappa r)\,dr_1}{J_1(\varkappa a)} + \cdots + \frac{J_n(\varkappa r)\,\delta r_n}{J_n(\varkappa a)} + \cdots\right\} \; . \; . \; (8).$$

Ist die Schwingung nicht annähernd symmetrisch, so wird die Frage complicirter. Die Normalschwingungsarten für die genau kreisförmige Membran sind einigermaassen unbestimmt, indess beseitigt die Unregelmässigkeit in der Begrenzung im

Allgemeinen die Unbestimmtheit. Die Lage der Knotendurchmesser muss so gewählt werden, dass die resultirenden Perioden ein Maximum oder Minimum haben. Wir wollen indessen annehmen, dass der angenäherte Schwingungstypus ist:

$$w = A_\nu J_\nu(\varkappa r) \cos \nu \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

und später untersuchen, wie die Anfangslinie gewählt werden muss, damit diese Form für w Geltung hat.

Nehmen wir alle übrigen Coefficienten als klein im Vergleich mit A_ν, so erhalten wir aus (4):

$$A_0 J_0(\varkappa a) + \cdots + A_\nu [J_\nu(\varkappa a) + \varkappa \delta r J_\nu'(\varkappa a)] \cos \nu \vartheta \\ + B_\nu J_\nu(\varkappa a) \sin \nu \vartheta + \cdots \\ + J_n(\varkappa a)[A_n \cos n\vartheta + B_n \cos n\vartheta] + \cdots = 0 \,. \quad (10).$$

Multipliciren wir mit $\cos \nu \vartheta$ und integriren, so wird:

$$\pi J_\nu(\varkappa a) + \varkappa J_\nu'(\varkappa a) \int_0^{2\pi} \delta r \cos^2 \nu \vartheta \, d\vartheta = 0,$$

oder:

$$J_\nu \left[\varkappa a + \varkappa \int_0^{2\pi} \delta r \cos^2 \nu \vartheta \frac{d\vartheta}{\pi} \right] = 0,$$

welches zeigt, dass der wirkliche Radius der Membran ist:

$$a + \int_0^{2\pi} \delta r \cos^2 \nu \vartheta \frac{d\vartheta}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Verhältnisse von A_n und B_n zu A_ν können wie vorher durch Integration der Gleichung (10) erhalten werden, nachdem letztere mit $\cos n\vartheta$ oder $\sin n\vartheta$ multiplicirt ist.

Am meisten Interesse hat aber die Tonhöhe. Die Anfangslinie ist so zu wählen, dass sie den Ausdruck (11) zu einem Maximum oder Minimum macht. Beziehen wir uns auf eine feste Linie im Raume, indem wir $\vartheta - \alpha$ an Stelle von α setzen, so haben wir die Abhängigkeit von α von der Grösse:

$$\int_0^{2\pi} dr \cos^2 \nu (\vartheta - \alpha) \, d\vartheta,$$

ins Auge zu fassen. Diese Grösse kann auch folgendermaassen geschrieben werden:

$$\cos^2 v\alpha \int_0^{2\pi} \delta r \cos^2 v\vartheta \, d\vartheta$$

$$+ 2 \cos v\alpha \sin v\alpha \int_0^{2\pi} \delta r \cos v\vartheta \sin v\vartheta \, d\vartheta$$

$$+ \sin^2 v\alpha \int_0^{2\pi} \delta r \sin^2 v\vartheta \, d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12),$$

und hat die Form:

$$A \cos^2 v\alpha + 2 B \cos v\alpha \sin v\alpha + C \sin^2 v\alpha,$$

worin A, B, C unabhängig von α sind. Es giebt demnach zwei zulässige Lagen der Knotendurchmesser, von denen die eine die Periode zu einem Maximum, und die andere diese zu einem Minimum macht. Die Durchmesser des einen Satzes von Linien halbiren die Winkel zwischen den Durchmessern des anderen Satzes.

Es giebt indessen auch Fälle, in welchen die Normalschwingungsarten unbestimmt bleiben; das tritt ein, wenn der Ausdruck (12) unabhängig von α ist. Und dieses ist wiederum der Fall, wenn δr constant oder wenn δr proportional $\cos v\vartheta$ ist. Z.B. würde, wenn δr proportional $\cos 2\vartheta$, oder in anderen Worten, wenn die Begrenzung leicht elliptisch gekrümmt wäre, das dem Werthe $n = 2$ entsprechende Knotenliniensystem (welches aus einem Paar senkrecht auf einander stehenden Durchmesser besteht) der Lage nach unbestimmt bleiben, wenigstens bei diesem Maasse der Annäherung. Dagegen muss der $n = 1$ entsprechende einzelne Durchmesser mit einer der Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen; die Perioden sind für die beiden Axen verschieden.

210. Wir haben gesehen, dass der tiefste Ton einer Membran, deren Begrenzung annähernd kreisförmig ist, nahezu derselbe wie der einer mechanisch ähnlichen Membran ist, von der Form eines Kreises mit demselben mittleren Radius oder demselben Flächeninhalt. Bei gegebenem Flächeninhalt der Membran muss offenbar irgend eine Form der Begrenzung vorhan-

den sein, für welche die Tonhöhe (des Grundtones) die tiefstmöglichste ist; diese Form kann keine andere wie der Kreis sein. Für eine angenäherte Kreisform vermag man einen analytischen Beweis hierfür zu geben, von dem das Folgende einen Abriss enthält.

In dem allgemeinen Werth von w:

$$w = A_0 J_0(\varkappa r) + \ldots + J_n(\varkappa r)(A_n \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta) + \ldots \quad (1),$$

sind für den gegenwärtigen Zweck A_1, B_1, ... als klein gegenüber A_0 zu nehmen. Wir finden aus der Bedingung, dass w verschwindet, wenn $r = a + \delta r$:

$$A_0 J_0(\varkappa a) + \varkappa A_0 J_0'(\varkappa a)\delta r + \frac{1}{2}\varkappa^2 A_0 J_0''(\varkappa a).(\delta r)^2 + \cdots$$
$$+ \Sigma[\{J_n(\varkappa a) + \varkappa J_n'(\varkappa a)\delta r + \cdots\}\{A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta\}] = 0 \quad (2).$$

Daher erhalten wir, wenn:

$$\delta r = \alpha_1 \cos\vartheta + \beta_1 \sin\vartheta + \cdots + \alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta + \ldots \quad (3),$$

nach Integration in Bezug auf ϑ von 0 bis 2π:

$$2 A_0 J_0 + \frac{1}{2}\varkappa^2 A_0 J_0'' \sum_{n=1}^{n=\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$
$$+ \varkappa \sum_{n=1}^{n=\infty} [(\alpha_n A_n + \beta_n B_n) J_n'] = 0 \quad (4).$$

Hieraus entnehmen wir, wie vorhin, dass, wenn die Quadrate der kleinen Grössen vernachlässigt werden: $J_0(\varkappa a) = 0$ ist, oder dass bis zu diesem Grade von Annäherung der mittlere Radius auch der wirklich zu nehmende Radius ist. Um eine grössere Annäherung zu erhalten, bestimmen wir zunächst $A_n : A_0$ und $B_n : B_0$, indem wir (2) mit $\cos n\vartheta$, $\sin n\vartheta$ multipliciren und dann zwischen den Grenzen 0 und 2π integriren. Daher:

$$A_n J_n = -\varkappa \alpha_n A_0 J_0', \quad B_n J_n = -\varkappa \beta_n A_0 J_0' \quad (5).$$

Setzen wir diese Werthe in (4) ein, so erhalten wir:

$$J_0(\varkappa a) = \frac{1}{2}\varkappa^2 \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[(\alpha_n^2 + \beta_n^2)\left\{\frac{J_n' J_0'}{J_n} - \frac{1}{2} J_0''\right\}\right] \quad (6).$$

Da J_0 die folgende Fundamentalgleichung erfüllt:

$$J_0'' + \frac{1}{\varkappa a} J_0' + J_0 = 0 \quad (7),$$

und in dem vorliegenden Falle J_0 annähernd $= 0$ ist, so können wir J_0'' durch $-\frac{1}{\varkappa a}J_0'$ ersetzen. Gleichung (6) wird dann:

$$J_0(\varkappa a) = \frac{1}{2}\varkappa^2 J_0' \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[(\alpha_n^2+\beta_n^2)\left\{\frac{J_n'}{J_n}+\frac{1}{2\varkappa a}\right\}\right] \quad \ldots (8).$$

Wir wollen nun annehmen, dass $a + da$ der Aequivalentradius der Membran ist, so dass:

$$J_0[\varkappa(a+da)] = J_0(\varkappa a) + J_0'(\varkappa a)\varkappa\, da = 0.$$

Dann ergiebt sich nach (8):

$$da = -\frac{1}{2}\varkappa \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[(\alpha_n^2+\beta_n^2)\left\{\frac{J_n'}{J_n}+\frac{1}{2\varkappa a}\right\}\right] \quad \ldots (9).$$

Andererseits ist, wenn $a + da'$ den Radius der genau kreisförmigen Membran mit demselben Flächeninhalt, wie die vorliegende Membran, bedeutet:

$$da' = \frac{1}{4a}\sum_{n=1}^{n=\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2) \quad \ldots\ldots\ldots (10),$$

so dass:

$$da' - da = \frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[(\alpha_n^2+\beta_n^2)\left\{1+\varkappa a\frac{J_n'(\varkappa a)}{J_n(\varkappa a)}\right\}\right] \quad \ldots (11).$$

Es fragt sich jetzt: welches ist das Zeichen des Gliedes auf der rechten Seite?

Ist $n = 1$ und wird z für $\varkappa a$ geschrieben, so verschwindet:

$$1 + z\frac{J_n'(z)}{J_n(z)}$$

annähernd wegen Gleichung (7), da im Allgemeinen $J_1 = -J_0'$ und in dem vorliegenden Falle $J_0(z)$ annähernd $= 0$ ist. Daher haben wir $da' - da = 0$, was auch augenscheinlich der Fall sein muss, da der fragliche Ausdruck nur eine Verschiebung des Kreises darstellt, ohne eine Aenderung in der Form der Begrenzug darzustellen. Wenn $n = 2$, so ergiebt (8) §. 200:

$$J_2 = \frac{2}{z}J_1 - J_0,$$

woraus wir mit Hinzuziehung von (7) finden, dass, wenn $J_0 = 0$:

$$\frac{J_2'}{J_2} = \frac{z^2-4}{2z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Demnach:

$$da' - da = \frac{1}{2a}(\alpha_2^2 + \beta_2^2)\left(\frac{z^2}{2} - 1\right). \quad . \quad (13),$$

welcher Ausdruck positiv ist, da $z = 2{,}404$.

Wir haben noch zu beweisen, dass:

$$1 + z\frac{J_n'(z)}{J_n(z)}$$

für alle ganzen Werthe von n, die grösser wie 2 sind, positiv ausfällt, wenn $z = 2{,}404$ ist. Zu diesem Zwecke können wir einen Satz benutzen, der sich in Riemann's „Partielle Differentialgleichungen" findet. Der Satz sagt aus, dass weder J_n noch J_n' eine Wurzel haben, die kleiner wie n ist (mit Ausnahme der Null). Die Differentialgleichung für J_n kann in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d^2 J_n(z)}{d(\log z)^2} + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0;$$

wobei im Anfange J_n und J_n' $\left(\text{so gut wie } \frac{dJ_n}{d\log z}\right)$ positiv sind. Demgemäss wächst $\frac{dJ_n}{d\log z}$ zunächst und hört mit dem Wachsen nicht eher auf, als bis $z = n$; hieraus ergiebt sich deutlich, dass innerhalb des Bereiches von $z = 0$ bis $z = n$ weder J_n noch J_n' verschwinden kann. Da J_n und J_n' ausserdem beide positiv sind bis zu $z = n$ heran, so folgt, dass, wenn n eine Zahl grösser wie 2,404 ist, $da' - da$ positiv sein muss. Wir schliessen hieraus, dass, wenn nicht $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \ldots$ sämmtlich verschwinden, da' grösser wie da ist, und das zeigt, dass für jede Membran von annähernd kreisförmiger Begrenzung der Kreis, dessen Flächeninhalt gleich dem der Membran ist, grösser sein muss, wie der Kreis, dessen Tonhöhe der der Membran gleich ist.

Wir haben gesehen, dass man allein aus dem Flächeninhalt einer annähernd kreisförmigen Membran eine gute Abschätzung über die Tonhöhe machen kann; mit Hülfe von Gleichung (9) lässt sich noch eine grössere Annäherung erreichen. Wir wollen diese Methode auf eine Ellipse anwen-

den, deren halbe grosse Axe R und deren Excentricität gleich e ist.

Die Polargleichung der Begrenzung lautet:

$$r = R\left\{1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{7}{64}e^4 + \cdots + \frac{1}{4}e^2 \cos 2\vartheta + \cdots\right\} \ldots (14),$$

so dass nach der Bezeichnungsweise dieses Abschnittes:

$$a = R\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{7}{64}e^4\right), \qquad \alpha^2 = \frac{1}{4}e^2 R.$$

Nach (9) ist:

$$da = -\frac{e^4 R}{32} \cdot \varkappa R \cdot \left\{\frac{J_2'(z)}{J_2(z)} + \frac{1}{2z}\right\},$$

oder nach (12), da $\varkappa R = z = 2{,}404$:

$$da = -\frac{2{,}779}{64} e^4 R.$$

Daher ist der Radius der kreisförmigen Membran mit derselben Tonhöhe:

$$a + da = R\left\{1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{9{,}779\, e^4}{64}\right\} \quad \ldots . (15),$$

worin das e^4 enthaltende Glied noch genau ist.

Das Resultat kann auch in Werthen von e und des Flächeninhaltes σ ausgedrückt werden. Wir haben:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{32}e^4\right),$$

und daher:

$$a + da = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}}\left(1 - \frac{3{,}779}{64}e^4\right) \quad \ldots . (16),$$

woraus wir sehen, wie klein der Einfluss einer mässig grossen Excentricität ausfällt, wenn der Flächeninhalt gegeben ist.

211. Ist die feste Begrenzung einer Membran weder gerade noch kreisförmig, so bietet das Problem, die Schwingungen einer solchen Membran zu bestimmen, Schwierigkeiten dar, welche im Allgemeinen nicht ohne die Einführung von bis jetzt noch nicht behandelten oder in Tabellen berechneten

Functionen überwunden werden können. Eine partielle Ausnahme hiervon macht die Ellipse. Für die Zwecke dieses Buches sind aber solche Probleme kaum hinreichend wichtig, um die Einführung einer verwickelten Analysis zu rechtfertigen. Der Leser wird daher auf die Originaluntersuchung des Herrn Mathieu[1]) verwiesen. Hier wird die Bemerkung hinreichen, dass das System der Knotenlinien sich aus confocalen Ellipsen und Hyperbeln zusammensetzt.

Lösbare Fälle können mittelst der allgemeinen Lösung:

$$w = A_0 J_0(\varkappa r) + \cdots + (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta) J_n(\varkappa r) + \cdots$$

aufgefunden werden.

Z. B. können wir setzen:

$$w = J_0(\varkappa r) - \lambda J_1(\varkappa r) \cos\vartheta,$$

und darauf, indem wir λ verschiedene Werthe beilegen, die verschiedenen Formen der Begrenzung ableiten, für welche dann die Lösung anwendbar ist.

Grossen Nutzen kann man oft aus der Beachtung des Theorems im §. 88 ziehen. Dasselbe lehrt, dass jede Zusammenziehung der festen Begrenzung einer schwingenden Membran mit einer Tonerhöhung verbunden ist, weil man die Sachlage so auffassen kann, dass der neue Zustand sich von dem alten nur durch die Einführung einer hinzukommenden Gebundenheit unterscheidet. Man nimmt dann an, dass Federn ohne Trägheit die in Betracht zu ziehende Begrenzungslinie gegen ihre Gleichgewichtslage drängen und allmälig steifer werden. Bei jedem Schritt werden die Schwingungen rascher, bis dieselben eine Grenze erreichen, die einer unendlichen Steifigkeit der Federn und einer absoluten Festigkeit der Angriffspunkte letzterer entspricht. Es ist nicht nothwendig, dass der abgeschnittene Theil dieselbe Dichtigkeit wie der übrigbleibende hat, er könnte selbst gar keine Dichtigkeit besitzen.

Z. B. liegt die Tonhöhe eines regulären Polygons zwischen denen des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises. Noch

---

1) Liouville, 1868.

engere Grenzen würde man nach dem Resultat des §. 210 erhalten, wenn man für den umschriebenen Kreis den mit gleichem Flächeninhalt setzt. Bei einem Sechseck ist das Verhältniss des Radius des Kreises mit gleichem Flächeninhalt zu dem Radius des eingeschriebenen Kreises gleich 1,050, so dass das Mittel aus diesen zwei Grenzen von dem richtigen Werth nicht um $2^1/_2$ Proc. abweichen kann. Auf gleiche Weise lässt sich schliessen, dass der Kreissector von 60^0 einen tieferen Ton giebt, wie ein gleichseitiges Dreieck, welches man erhält, wenn man die Sehne für den Kreisbogen im Sector einsetzt.

Die folgende Tabelle giebt die relative Schwingungszahl in gewissen der Berechnung zugänglichen Fällen für den tiefsten Ton von Membranen unter ähnlichen mechanischen Bedingungen und von gleichem Flächeninhalt (σ); die Tabelle zeigt die Wirkung einer grössern oder geringern Abweichung von der kreisförmigen Gestalt.

Kreis	$2{,}404 . \sqrt{\pi} = 4{,}261$,
Quadrat	$\sqrt{2} . \pi = 4{,}443$,
Kreisquadrant	$\frac{5{,}135}{2} . \sqrt{\pi} = 4{,}551$,
Kreissector von 60^0	$6{,}379 \sqrt{\frac{\pi}{6}} = 4{,}616$,
Rechteck 3 × 2	$\sqrt{\frac{13}{6}} . \pi = 4{,}624$,
Gleichseitiges Dreieck	$2\pi . \sqrt{tang\, 30^0} = 4{,}774$,
Halbkreis	$3{,}832 \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 4{,}803$,
Rechteck 2 × 1 . . . . / Rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck	$\pi \sqrt{\frac{5}{2}} = 4{,}967$,
Rechteck 3 × 1	$\pi \sqrt{\frac{10}{3}} = 5{,}736$.

Haben z. B. ein Quadrat und ein Kreis denselben Flächeninhalt, so schwingt das erstere rascher in dem Verhältniss von 4,443 : 4,261.

Für den Kreis ist die absolute Schwingungszahl:

$$2\pi \times 2{,}404\, c \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}},\ \text{worin}\ c = \sqrt{T_1} : \sqrt{\varrho}.$$

Für ähnliche Formen verhalten sich die Schwingungszahlen umgekehrt wie die linearen Dimensionen.

212. Die Theorie der freien Schwingungen einer Membran wurde zuerst mit Erfolg von Poisson[1]) in Angriff genommen. Seine Theorie für ein Rechteck lässt wenig zu wünschen übrig, seine Behandlungsweise der kreisförmigen Membran beschränkt sich aber auf symmetrische Schwingungen. Kirchhoff's Lösung des ähnlichen, aber viel schwierigeren Falles einer kreisförmigen Platte wurde 1850 veröffentlicht; Clebsch's Theorie der Elasticität (1862) giebt die allgemeine Theorie der kreisförmigen Membran mit Einschluss der Wirkung der Steifheit und Rotationsträgheit. Es zeigt sich, dass 1866 nicht viel mehr zu thun übrig blieb; nichtsdestoweniger enthält die schon erwähnte Arbeit von Bourget eine nützliche Discussion des Problems, begleitet von sehr vollständigen numerischen Resultaten; der wesentliche Inhalt war indess nicht mehr neu.

213. Bei seinen experimentellen Untersuchungen gebrauchte Bourget verschiedene Materialien; Papier erprobte sich als das beste. Das Papier wurde in Wasser getaucht und nach Entfernung der überflüssigen Feuchtigkeit durch Löschpapier auf einen hölzernen Rahmen gelegt, dessen Seiten vorher mit Leim bestrichen waren. Die Zusammenziehung des Papiers beim Trocknen verursachte die nöthige Spannung, indessen hat man häufig mit vielfachem Misslingen zu kämpfen, ehe ein genügendes Resultat erreicht wird. Selbst eine gut ausgespannte Membran erfordert beim Gebrauch grosse Vorsichtsmaassregeln, da ihre Tonhöhe wegen der wechselnden Feuchtigkeit der Atmosphäre grossen Aenderungen unterliegt. Die Schwingungen werden durch Orgelpfeifen erregt, von

[1]) Mém. de l'Académie t. VIII, 1829.

denen man eine Reihe nöthig hat, die in kleinen Intervallen in der Tonhöhe aufsteigen; die Schwingungen selbst werden dem Auge durch kleine auf die Membran gestreute Sandkörner sichtbar gemacht. Sind die Schwingungen kräftig genug, so häuft sich der Sand in den Knotenlinien an, deren Form daher mit grösserer oder geringerer Genauigkeit durch den Sand bestimmt wird. Jede Ungleichheit in der Spannung zeigt sich von selbst darin, dass die Kreise elliptisch werden.

Die wichtigsten Versuchsresultate sind folgende:

Eine kreisförmige Membran kann mit keinem Tone *unisono* schwingen. Sie kann nur sich selbst in Einklang stellen mit Klängen, die höher wie derjenige sind, welcher beim leisen Antippen der Membran gehört wird.

Wie die Theorie auch angiebt, werden diese möglichen Töne, je höher sie werden, durch immer kleiner werdende Intervalle getrennt.

Die Knotenlinien werden nur für gewisse bestimmte Klänge genau ausgebildet. Eine Kleinigkeit tiefer oder höher im Klange bringt schon Verwirrung hervor; wird die Tonhöhe der Orgelpfeife entschieden geändert, so bleibt die Membran unbewegt. Es ist nicht, wie Savart annahm, ein continuirlicher Uebergang von einem System von Knotenlinien zu einem andern vorhanden.

Die Knotenlinien sind Kreise, oder Durchmesser, oder Combinationen von Kreisen und Durchmessern, wie es auch die Theorie verlangt. Indessen hat der Sand, wenn die Anzahl der Durchmesser zwei überschreitet, das Bestreben, sich verworren gegen die Mitte der Membran hin aufzuhäufen; die Knotenlinien sind nicht genau ausgeprägt.

Dieselben allgemeinen Gesetze wurden von den Herren Bernard und Bourget[1]) bei quadratischen Membranen als richtig gefunden; diese Autoren glauben, dass die Resultate der Theorie entschieden gültig befunden sind im Gegensatze zu den Ansichten Savart's, der glaubte, dass eine Membran auf jeden Fall resoniren kann, gleichgültig, welche Höhe der

[1]) Ann. de Chim. LX, p. 449 — 479, 1860.

letztere hat. Ich muss indessen hier bemerken, dass mir der Unterschied zwischen erzwungener und freier Schwingung nicht genügend berücksichtigt zu sein scheint. Wird eine Membran durch Luftwellen, die ihren Ursprung in einer Orgelpfeife haben, in Bewegung gesetzt, so ist die Schwingung eigentlich eine erzwungene. Die Theorie behauptet nun nicht, dass die Membran überhaupt nur fähig ist, mit gewissen bestimmten Schwingungszahlen zu schwingen, sondern nur, dass sie solche bestimmten Schwingungen beim freien Schwingen allein ausführen kann. Ist indessen die Periode der Kraft nicht annähernd gleich einer der natürlichen Perioden, so könnte die resultirende Schwingung unmerklich sein.

Bei Savart's Versuchen war der Ton der Pfeife um zwei oder drei Octaven höher wie der tiefste Ton der Membran und stand demnach niemals weit von dem Unisono mit einem aus der Reihe der Obertöne ab. Die Herren Bourget und Bernard stellten den Versuch unter günstigeren Bedingungen an. Bliesen dieselben eine Pfeife an, deren Tonhöhe etwas tiefer wie der tiefste Ton der Membran war, so blieb der Sand in Ruhe, wurde jedoch in lebhafte Schwingung versetzt, sowie das Unisono erreicht war. Sobald die Pfeife entschieden höher wie die Membran war, kam der Sand wieder zur Ruhe. Eine Modification dieses Versuches wurde in der Weise angestellt, dass zunächst die Pfeife etwa eine Terz höher wie die Membran, allein schwingend, abgestimmt wurde. Die Membran wurde darauf erhitzt, bis ihre Spannung hinreichend gross geworden war, den Ton jener über den der Pfeife zu bringen. Während der Abkühlung sank die Tonhöhe allmälig; der Punkt, wo Coincidenz stattfand, zeigte sich selbst durch eine lebhafte Bewegung des Sandes an, der bei Beginn und am Ende des Versuchs, soweit zu bemerken war, in Ruhe blieb.

Herr Bourget fand zwischen Theorie und Beobachtung in Bezug auf die Radien der kreisförmigen Knotenlinien eine gute Uebereinstimmung, obgleich der Beweis hierfür nicht sehr genau war wegen der merklichen Breite der Sandbänder; die relative Höhe der verschiedenen Einzeltöne wich aber beträchtlich von den theoretischen Schätzungen ab. Das von der französischen Akademie zum Bericht über Herrn Bourget's

Arbeit eingesetzte Comité schlägt als Erklärung hierfür einen Mangel an einer vollkommenen Festigkeit der Begrenzung vor. Man muss gleichfalls daran denken, dass die Theorie sich auf der Annahme einer vollkommenen Biegsamkeit aufbaut — eine Zustandsbedingung, die durch eine gewöhnliche Membran, welche durch eine verhältnissmässig kleine Kraft gespannt ist, überhaupt nicht mit gar grosser Annäherung erreicht wird. Vielleicht ist aber der wichtigste der störenden Einflüsse der Widerstand der Luft, welcher auf eine Membran eine grössere Wirkung hat, wie auf eine Saite oder einen Stab wegen der grossen der Luft ausgesetzten Oberfläche. Die tiefste Schwingungsart, bei welcher die Verschiebung in allen Punkten in derselben Richtung erfolgt, kann von dem Widerstand der Luft in ganz anderer Weise beeinflusst werden, wie die höheren Schwingungsarten, bei denen eine so starke Verschiebung der Luft von der einen Seite zur andern nicht nöthig ist.

Zehntes Capitel.

Schwingungen von Platten.

214. Um nach Green's Methode die Gleichgewichts- und Bewegungsgleichung für eine dünne, feste Platte von gleichmässigem, isotropem Material und constanter Dicke aufstellen zu können, haben wir den Ausdruck für die potentielle Energie der Biegung nöthig. Man sieht leicht ein, dass für jede Flächeneinheit die potentielle Energie V eine positive, homogene, symmetrische, quadratische Function der beiden Hauptkrümmungen ist. Sind daher ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien, so wird der Ausdruck für V:

$$A\left(\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}+\frac{2\mu}{\varrho_1\varrho_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

worin A und μ Constanten sind, von denen A positiv und μ numerisch kleiner wie Eins sein muss. Ueberdies muss die Constante μ bei einem Materiale von einer solchen Beschaffenheit, dass, wenn ein Stab aus demselben ausgezogen wird, dieser keine seitliche Contraction erfährt, verschwinden. Der vorstehende Betrag von Kenntnissen ist Alles, was für unsern Zweck erforderlich ist; wir können uns daher mit einer blossen Angabe der Relationen zwischen den Constanten in (1) und denen begnügen, mittelst welcher die elastischen Eigenschaften der Körper gewöhnlich definirt werden.

Aus Thomson und Tait's Theoretischer Physik, §§. 639, 642, 720, geht hervor, dass, wenn b die Dicke, q Young's

Elasticitätsmodul und μ das Verhältniss der seitlichen Contraction zur Längenausdehnung ist für den Fall, wo ein Stab gedehnt wird, der Ausdruck für V wird:

$$V = \frac{qb^3}{24\,(1-\mu^2)}\left\{\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{2\mu}{\varrho_1\varrho_2}\right\}$$
$$= \frac{qb^3}{24\,(1-\mu^2)}\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)^2 - \frac{2\,(1-\mu)}{\varrho_1\varrho_2}\right\} \;..\; (2)\,[1].$$

Ist w die kleine Verschiebung senkrecht zur Plattenebene in dem Punkte, dessen rechtwinklige Coordinaten in der Plattenebene x und y sind, so ist:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \nabla^2 w,\quad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{d^2w}{dx^2}\,\frac{d^2w}{dy^2} - \left(\frac{d^2w}{dx\,dy}\right)^2.$$

Daher haben wir für die Flächeneinheit:

$$V = \frac{qb^3}{24(1-\mu^2)}\left[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu)\left\{\frac{d^2w}{dx^2}\,\frac{d^2w}{dy^2} - \left(\frac{d^2w}{dx\,dy}\right)^2\right\}\right] ..(3),$$

welche Grösse über die ganze Oberfläche (S) der Platte integrirt werden muss.

215. Wir wollen nun die Variation von V aufsuchen; indessen ist vorher zu bemerken, dass das zweite Glied in V, nämlich $\iint \frac{dS}{\varrho_1\varrho_2}$, die ganze Krümmung der Platte dar-

---

[1]) Die folgende Vergleichung der von den bedeutenderen Autoren gebrauchten Benennungen wird denjenigen, welche die Originalarbeiten nachzusehen wünschen, nützlich sein:

Young's Modul $= E$ (Clebsch) $= M$ (Thomson) $= \frac{9\,n\,\varkappa}{3\,\varkappa + n}$ (Thomson)
$= \frac{n\,(3\,m - n)}{m}$ (Thomson) $= q$ (Kirchhoff und Donkin)
$= 2\,K\,\frac{1 + 3\,\vartheta}{1 + \vartheta}$ (Kirchhoff).

Verhältnis der seitlichen Contraction zur Längendilatation:
$= \mu$ (Clebsch und Donkin) $= \sigma$ (Thomson)
$= \frac{m - n}{2\,m}$ (Thomson) $= \frac{\vartheta}{1 + 2\,\vartheta}$ (Kirchhoff).

Poisson nahm hierfür den Werth $\frac{1}{4}$ an, Werthheim aber $\frac{1}{3}$.

stellt, und daher nur von dem Zustand der Dinge an den Kanten abhängt.

Wir haben:

$$\delta V = \frac{q b^3}{12(1-\mu^2)} \int\int \left\{ \nabla^2 w . \nabla^2 \delta w - (1-\mu) \delta \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \right\} dS .. (1);$$

so dass die zwei folgenden Variationen zu betrachten sind:

$$\int\int \nabla^2 w . \nabla^2 \delta w . dS \text{ und } \int\int \delta \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} dS.$$

Nun ist nach dem Green'schen Satze:

$$\int\int \nabla^2 w . \nabla^2 \delta w . dS = \int\int \nabla^4 w . \delta w . dS$$
$$- \int \frac{d \nabla^2 w}{dn} . \delta w . ds + \int \nabla^2 w \frac{d \delta w}{dn} ds .. (2),$$

worin ds ein Element der Begrenzung und $\frac{d}{dn}$ die Differentiation nach der nach aussen gezogenen Normale an der Begrenzung bezeichnet.

Die Transformation des zweiten Theiles ist schwieriger. Wir haben:

$$\delta \int\int \frac{dS}{\varrho_1 \varrho_2} = \int\int \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} - 2 \frac{d^2 w}{dx\, dy} \frac{d^2 \delta w}{dx\, dy} \right\} dS.$$

Die unter dem Integrationszeichen stehende Grösse kann in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{d \delta w}{dy} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d \delta w}{dx} \frac{d^2 w}{dx\, dy} \right)$$
$$+ \frac{d}{dx} \left(\frac{d \delta w}{dx} \frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d \delta w}{dy} \frac{d^2 w}{dx\, dy} \right).$$

Ist nun F irgend eine Function von x und y, so haben wir:

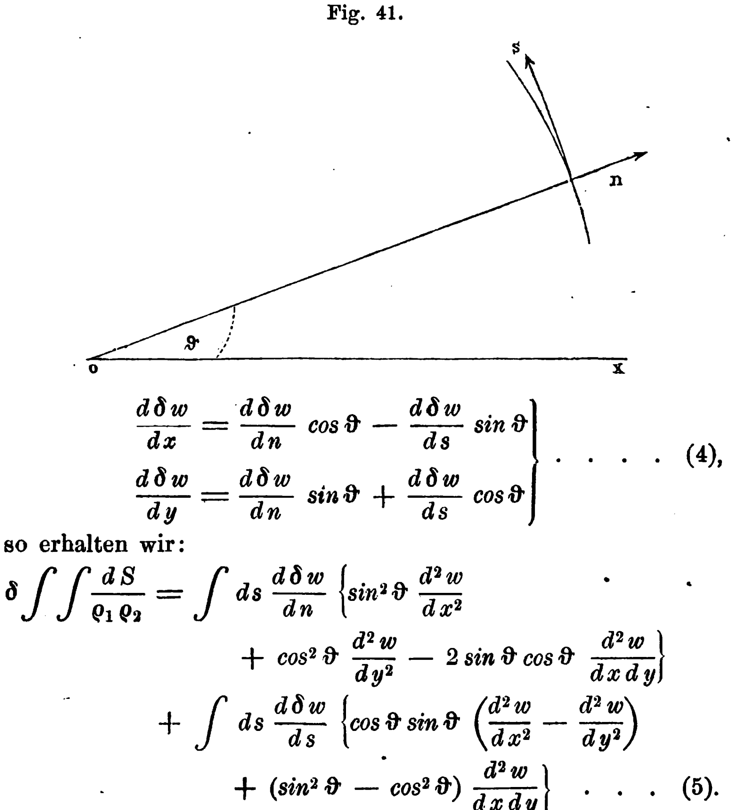
$$\left. \begin{aligned} \int\int \frac{dF}{dy} dx\, dy &= \int F \sin \vartheta\, ds \\ \int\int \frac{dF}{dx} dx\, dy &= \int F \cos \vartheta\, ds \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; (3),$$

worin ϑ der Winkel zwischen x und der nach aussen gezogenen Normale ist, und die Integration auf der rechten Seite sich um die ganze Umgrenzung erstreckt. Mit Benutzung dieser Relationen finden wir:

$$\delta \int\int \frac{dS}{\varrho_1 \varrho_2} = \int ds \sin\vartheta \left\{\frac{d\delta w}{dy}\,\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\delta w}{dx}\,\frac{d^2 w}{dx\,dy}\right\} + \int ds \cos\vartheta \left\{\frac{d\delta w}{dx}\,\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d\delta w}{dy}\,\frac{d^2 w}{dx\,dy}\right\}.$$

Setzen wir für $\frac{d\delta w}{dx}$, $\frac{d\delta w}{dy}$ ihre Werthe in Ausdrücken von $\frac{d\delta w}{dn}$, $\frac{d\delta w}{ds}$ aus den folgenden Gleichungen (vgl. Fig. 41):

Fig. 41.



$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta w}{dx} &= \frac{d\delta w}{dn}\cos\vartheta - \frac{d\delta w}{ds}\sin\vartheta \\ \frac{d\delta w}{dy} &= \frac{d\delta w}{dn}\sin\vartheta + \frac{d\delta w}{ds}\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4),$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta \int\int \frac{dS}{\varrho_1 \varrho_2} = & \int ds\, \frac{d\delta w}{dn} \left\{\sin^2\vartheta\, \frac{d^2 w}{dx^2} + \cos^2\vartheta\, \frac{d^2 w}{dy^2} - 2\sin\vartheta\cos\vartheta\, \frac{d^2 w}{dx\,dy}\right\} \\ & + \int ds\, \frac{d\delta w}{ds} \left\{\cos\vartheta\sin\vartheta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d^2 w}{dy^2}\right) + (\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\, \frac{d^2 w}{dx\,dy}\right\} \quad \ldots (5). \end{aligned}$$

Das zweite Integral kann durch eine partielle Integration nach s in folgende Form gebracht werden:

$$\int dw \frac{d}{ds}\left\{\cos\vartheta \sin\vartheta\left(\frac{d^2w}{dy^2}-\frac{d^2w}{dx^2}\right) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\frac{d^2w}{dx\,dy}\right\} ds.$$

Addiren wir und ordnen wir unser Resultat, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\delta V = \frac{qb^3}{12(1-\mu^2)}\Big[\int\!\!\int \nabla^4 w\,\delta w\, dS \\ - \int \delta w\, ds\left\{\frac{d\nabla^2 w}{dn} + (1-\mu)\frac{d}{ds}\left(\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\frac{d^2w}{dy^2}-\frac{d^2w}{dx^2}\right) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\frac{d^2w}{dx\,dy}\right)\right\} \\ + \int \frac{d\,\delta w}{dn}\, ds\left\{\mu\nabla^2 w + (1-\mu)\left(\cos^2\vartheta\frac{d^2w}{dx^2} + \sin^2\vartheta\frac{d^2w}{dy^2} + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{d^2w}{dx\,dy}\right)\right\}\Big] \quad . \; . \; . \; (6).\end{aligned}$$

Jetzt liegen keine Schwierigkeiten mehr vor, um die Bewegungsgleichung aufzustellen. Ist ϱ die Volumendichtigkeit und $Z\varrho b\,dS$ die auf das Element wirkende transversale Kraft, so ist:

$$\delta V - \int\!\!\int Z\varrho b\,\delta w\,dS + \int\!\!\int \varrho b\ddot{w}\,\delta w\,dS = 0 \; . \; . \; (7)^{1)}$$

die allgemeine Variationsgleichung, welche richtig sein muss, was für eine Function man auch für δw wählen mag (natürlich muss diese Function mit den Bedingungen des Systems verträglich sein). Nach den Principien der Variationsrechnung ist demnach an jedem Punkte der Platte:

$$\frac{qb^2}{12\varrho(1-\mu^2)}\nabla^4 w - Z + \ddot{w} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Sind die Kanten der Platte frei, so ist keine Einschränkung in Betreff der Grenzwerthe von δw und $\frac{d\delta w}{dn}$ vorhanden,

---

[1]) Die Rotationsträgheit ist hier vernachlässigt.

daher müssen die Coefficienten dieser Grössen in dem Ausdruck für dV verschwinden. Die an einem freien Ende zu erfüllenden Bedingungen sind daher:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\nabla^2 w}{dn} + (1-\mu)\frac{d}{ds}\left\{\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\frac{d^2w}{dy^2}-\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right. \\ \left. + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\frac{d^2w}{dx\,dy}\right\} = 0 \\ \mu\nabla^2 w + (1-\mu)\left\{\cos^2\vartheta\frac{d^2w}{dx^2} + \sin^2\vartheta\frac{d^2w}{dy^2}\right. \\ \left. + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{d^2w}{dx\,dy}\right\} = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (9).$$

Ist die ganze Begrenzung der Platte festgeklemmt, so muss sein $\delta w = 0$, $\frac{d\,\delta w}{dn} = 0$; die Erfüllung der Grenzbedingungen ist dann schon gesichert. Ist die Kante „gehalten“ [1]), so ist $\delta w = 0$, aber $\frac{d\,\delta w}{dn}$ ist willkürlich. Die zweite der Gleichungen (9) muss in diesem Falle von w erfüllt werden.

216. Die Grenzgleichungen können vereinfacht werden, wenn man das im Gebrauch der Cartesianischen Coordinaten eingeschlossene äussere Element fortschafft. Nehmen wir die x-Axe parallel der Normale an die Begrenzungscurve, so sind wir berechtigt, folgendermaassen zu schreiben:

$$\cos^2\vartheta\frac{d^2w}{dx^2} + \sin^2\vartheta\frac{d^2w}{dy^2} + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\frac{d^2w}{dx\,dy} = \frac{d^2w}{dn^2}.$$

Ebenso:

$$\nabla^2 w = \frac{d^2w}{dn^2} + \frac{d^2w}{d\sigma^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

worin σ eine feste Axe bedeutet, die mit der Tangente in dem in Betracht gezogenen Punkt zusammenfällt. Im Allgemeinen unterscheidet sich $\frac{d^2w}{d\sigma^2}$ von $\frac{d^2w}{ds^2}$. Um die Relation zwischen diesen Grössen zu finden, können wir folgendermaassen vor-

1) Vergleiche §. 162.

gehen. Wir entwickeln w in der Maclaurin'schen Reihe nach aufsteigenden Potenzen der kleinen Grössen n und σ und setzen für n und σ ihre Werthe, ausgedrückt durch den Curvenbogen s.

Allgemein ist so:

$$w = w_0 + \frac{dw}{dn_0} n + \frac{dw}{d\sigma_0} \sigma$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dn_0^2} n^2 + \frac{d^2 w}{dn_0\, d\sigma_0} n\sigma + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{d\sigma_0^2} \sigma^2 + \ldots,$$

während auf der Curve $\sigma = s +$ Glieder dritter Ordnung, $n = -\frac{1}{2} \frac{s^2}{\varrho} + \ldots$, wo ϱ der Krümmungsradius ist. Demnach ist für Punkte auf der Curve:

$$w = w_0 - \frac{1}{2} \frac{dw}{dn_0} \frac{s^2}{\varrho} + \frac{dw}{d\sigma_0} s + \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{d\sigma_0^2} s_2 + \text{Cuben von } s.$$

Also:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d^2 w}{d\sigma^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{dw}{dn} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Somit folgt aus (1):

$$\nabla^2 w = \frac{d^2 w}{dn^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dw}{dn} + \frac{d^2 w}{ds^2} \quad \ldots \ldots (3).$$

Wir schliessen hieraus, dass die zweite Grenzbedingung in (9) §. 215 in folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{d^2 w}{dn^2} + \mu \left(\frac{1}{\varrho} \frac{dw}{dn} + \frac{d^2 w}{ds^2}\right) = 0 \quad \ldots \ldots (4).$$

Auf gleiche Weise erkennen wir, dass wenn $\vartheta = 0$ gesetzt wird:

$$\cos\vartheta \sin\vartheta \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{d^2 w}{dx^2}\right) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \frac{d^2 w}{dx\, dy}$$

äquivalent mit $\frac{d^2 w}{dn\, d\sigma}$ ist, wobei zu beachten sein wird, dass die Axen n und σ fest sind. Die erste Grenzbedingung wird nun:

$$\frac{d}{dn} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 w}{dn\, d\sigma}\right) = 0 \quad \ldots (5).$$

Wenden wir diese Gleichungen auf das Rechteck an, dessen Seiten parallel den Coordinatenaxen sind, so erhalten wir als die längs den y parallel gehenden Kanten zu erfüllenden Grenzbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^2 w}{dx^2} + (2-\mu)\frac{d^2 w}{dy^2}\right\} = 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} + \mu\frac{d^2 w}{dy^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6).$$

In diesem Falle verschwindet der Unterschied zwischen σ und s; ϱ, der Krümmungsradius, wird unendlich gross. Die Bedingungen für das andere Seitenpaar werden einfach durch Vertauschung von x und y gefunden. Diese Resultate konnten eben so gut direct aus (9) §. 215 erhalten werden ohne eine vorhergehende Transformation.

217. Nehmen wir $Z = 0$ und schreiben:

$$\frac{q b^2}{12\varrho(1-\mu^2)} = c^4 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

so geht die allgemeine Gleichung über in:

$$\ddot{w} + c^4 \nabla^4 w = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

oder, wenn $w \propto \cos(pt - \varepsilon)$, in:

$$\nabla^4 w = \varkappa^4 w \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

worin:

$$\varkappa^4 = p^2 : c^4 \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Jedes Paar von Werthen von w, u und v, welche denselben Grenzbedingungen entsprechen, sind einandert **conjugirt**, d. h. es ist:

$$\iint u v \, dS = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

vorausgesetzt, dass die Perioden verschieden sind. Um dieses aus der gewöhnlichen Differentialgleichung (3) nachzuweisen, müssten wir die Schritte, welche uns zu (3) führten, rückwärts machen. Das ist die von **Kirchoff** für die kreisförmige Scheibe eingeschlagene Methode; es ist indessen viel einfacher und führt directer zum Ziel, wenn wir die Variationsgleichung:

$$dV + \varrho b \iint \ddot{w}\, \delta w \, dS = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

benutzen, in welcher sich w auf die thatsächliche Bewegung bezieht, und δw auf eine beliebige mit der Natur des Systems verträgliche Verschiebung. δV ist eine symmetrische Function von w und δw, wie man aus §. 215 oder aus dem allgemeinen Charakter von V (§. 94) ersehen kann.

Nehmen wir nun zunächst an, dass $w = u$, $\delta w = v$, so haben wir:

$$\delta V = \varrho b p^2 \int\int u v d S;$$

auf gleiche Weise, wenn wir $w = v$, $\delta w = u$ setzen, wozu wir ebenso befugt sind:

$$\delta V = \varrho b p'^2 \int\int u v d S,$$

woraus:

$$(p^2 - p'^2) \int\int u v d S = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Dieser Beweis ist gültig, welches auch die Gestalt der Begrenzung sein mag, und ob dabei die Kanten entweder theilweise oder ganz festgeklemmt, gehalten oder frei sind.

Wie bei den Membranen im vorhergehenden Capitel kann auch hier Gleichung (7) zu dem Nachweis benutzt werden, dass die zulässigen Werthe von p^2 reell sind; dies liegt aber aus physikalischen Betrachtungen auf der Hand.

218. Behufs der Anwendung auf eine Kreisscheibe müssen wir die Gleichungen in Polarcoordinaten ausdrücken. Nehmen wir den Mittelpunkt der Scheibe als Pol, so haben wir als allgemeine Gleichung, die von allen Punkten der Fläche erfüllt werden muss:

$$(\nabla^4 - \varkappa^4)\, w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin (§. 200):

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d r} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d \vartheta^2}.$$

Um die Grenzbedingung für eine freie Kante ($r = a$) auszudrücken, haben wir:

$$\frac{d}{dn}\nabla^2 w = \frac{d}{dr}\nabla^2 w, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2 w}{dn\, d\sigma}\right) = \frac{d}{a\, d\vartheta}\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{r\, d\vartheta}\right),$$

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d^2 w}{a^2 d\vartheta^2},$$

ϱ = dem Krümmungsradius = a; daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) + \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{2-\mu}{a^2}\frac{dw}{dr} - \frac{3-\mu}{a^3}w\right) = 0 \\ \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu\left(\frac{1}{a}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{a^2}\frac{d^2 w}{d\vartheta^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . . (2).$$

Nach Ausführung der Differentiationen ist r gleich a zu setzen.

Wird w nach der Fourier'schen Reihe entwickelt:

$$w = w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots,$$

so muss jedes Glied dieser Reihe einzeln (2) genügen; da:

$$w_n \propto \cos(n\vartheta - \alpha),$$

so ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_n}{dr}\right) - n^2\left(\frac{2-\mu}{a^2}\frac{dw_n}{dr} - \frac{3-\mu}{a^3}w_n\right) = 0 \\ \frac{d^2 w_n}{dr^2} + \mu\left(\frac{1}{a}\frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{a^2}w_n\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . . (3).$$

Die Oberflächen-Differentialgleichung kann geschrieben werden:

$$(\nabla^2 + \varkappa^2)(\nabla^2 - \varkappa^2)\, w = 0,$$

welches für das allgemeine Glied der Fourier'schen Entwickelung wird:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + \varkappa^2\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - \varkappa^2\right) w_n = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass man den vollständigen Werth von n erhält, indem man die mit willkürlichen Constanten versehenen allgemeinen Lösungen von:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \pm \varkappa^2\right) w_n = 0 \quad . . . . (4)$$

zusammenaddirt.

Die Gleichung mit dem oberen positiven Zeichen ist dieselbe wie die für Schwingungen von kreisförmigen Membranen erhaltene; wir ziehen demnach wie in dem vorhergehenden Capitel den Schluss, dass die auf das vorliegende Problem anwendbare Lösung ist: $w_n \propto J_n(\varkappa r)$, wobei hier die zweite Function von r nicht zulässig ist.

Auf gleiche Weise erhält man für die Lösung der Gleichung mit dem unteren, negativen Zeichen $w_n \propto J_n(i\varkappa r)$, worin, wie gewöhnlich, $i = \sqrt{-1}$ ist.

Die einfache Schwingung ist demnach:

$$w_n = \cos n\vartheta\ \{\alpha J_n(\varkappa r) + \beta J_n(i\varkappa r)\} \\ + \sin n\vartheta\ \{\gamma J_n(\varkappa r) + \delta J_n(i\varkappa r)\}.$$

Die zwei Grenzgleichungen bestimmen die zulässigen Werthe von $\varkappa$ und die Werthe, welche den Verhältnissen $\alpha : \beta$ und $\gamma : \delta$ gegeben werden müssen. Aus der Form dieser Gleichungen ergiebt sich augenscheinlich, dass wir haben müssen:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta;$$

daher kann w_n in folgende Form gebracht werden:

$$w_n = P\cos(n\vartheta - \alpha)\{J_n(\varkappa r) + \lambda J_n(i\varkappa r)\}\cos(pt - \varepsilon) \quad \ldots \quad (5).$$

Wie bei einer Membran setzt sich das System der Knotenlinien zusammen aus den n symmetrisch um den Mittelpunkt vertheilten, aber sonst beliebigen Durchmessern, welche durch:

$$\cos(n\vartheta - \alpha) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

angegeben werden, und den concentrischen Kreisen, deren Gleichung ist:

$$J_n(\varkappa r) + \lambda J_n(i\varkappa r) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

219. Um λ und $\varkappa$ zu bestimmen, müssen wir die Grenzbedingungen einführen. Ist die Kante frei, so erhalten wir aus (3) §. 218:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda &= \frac{n^2(\mu-1)\{\varkappa a J_n'(\varkappa a) - J_n(\varkappa a)\} - \varkappa^3 a^3 J_n'(\varkappa a)}{n^2(\mu-1)\{i\varkappa a J_n'(i\varkappa a) - J_n(i\varkappa a)\} + i\varkappa^3 a^3 J_n'(i\varkappa a)} \\ -\lambda &= \frac{(\mu-1)\{\varkappa a J_n'(\varkappa a) - n^2 J_n(\varkappa a)\} - \varkappa^2 a^2 J_n(\varkappa a)}{(\mu-1)\{i\varkappa a J_n'(i\varkappa a) - n^2 J_n(i\varkappa a)\} + \varkappa^2 a^2 J_n(i\varkappa a)} \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

Wir haben in diesen Gleichungen von den Differentialgleichungen Gebrauch gemacht, die von $J_n(\varkappa r)$, $J_n(i\varkappa r)$ erfüllt werden. In jedem der auf der rechten Seite stehenden Brüche kann der Nenner aus dem Zähler durch Einsetzung von $i\varkappa$ an Stelle von $\varkappa$ abgeleitet werden. Durch Elimination von λ wird die Gleichung erhalten, deren Wurzeln die zulässigen Werthe von $\varkappa$ geben.

Ist $n = 0$, so nimmt das Resultat eine einfache Form an, nämlich:

$$2(1-\mu) + i\varkappa a \frac{J_0(i\varkappa a)}{J_0'(i\varkappa a)} + \varkappa a \frac{J_0(\varkappa a)}{J_0'(\varkappa a)} = 0 \quad \ldots (2).$$

Natürlich hätte man diese Gleichung von Anfang an viel leichter erhalten können, wenn man n sofort vernachlässigte.

Die Berechnung der ersten Wurzel für jeden Werth von n ist verwickelt; bei dem Fehlen von geeigneten Tabellen muss diese Berechnung mittelst der aufsteigenden Reihe für die Functionen $J_n(\varkappa r)$, $J_n(i\varkappa r)$ bewirkt werden. Für die höheren Wurzeln kann man auf die halb convergente absteigende Reihe für dieselben Functionen zurückgehen. Kirchhoff findet:

$$\operatorname{tang}\left(\varkappa a - \frac{1}{2} n\pi\right) = \frac{\dfrac{B}{8\varkappa a} + \dfrac{C}{(8\varkappa a)^2} - \dfrac{D}{(8\varkappa a)^3} + \cdots}{A + \dfrac{B}{8\varkappa a} + \dfrac{D}{(8\varkappa a)} + \cdots} \quad \ldots (3),$$

worin:

$$A = \gamma = (1-\mu)^{-1}$$
$$B = \gamma(1-4n^2) - 8$$
$$C = \gamma(1-4n^2)(9-4n^2) + 48(1+4n^2)$$
$$D = -\gamma\,\frac{1}{3}\{(1-4n^2)(9-4n^2)(13-4n^2)\}$$
$$+ 8(9 + 136n^2 + 80n^4).$$

Ist $\varkappa a$ gross, so haben wir annähernd:

$$\operatorname{tang}\left(\varkappa a - \frac{1}{2} n\pi\right) = 0;$$

woraus:

$$\varkappa a = \frac{1}{2}\pi(n + 2h) \quad \ldots\ldots\ldots (4).$$

h ist hier eine ganze Zahl.

Aus der numerischen Vergleichung geht hervor, dass h identisch mit der Anzahl der kreisförmigen Knotenlinien ist und dass (4) ein von Chladni entdecktes Gesetz ausdrückt, das nämlich, dass die Schwingungszahlen, welche den Figuren mit einer gegebenen Anzahl von Durchmesserknotenlinien entsprechen (mit Ausnahme der tiefsten Schwingung), proportional den Quadraten der auf einander folgenden geraden oder ungeraden Zahlen sind, je nachdem die Anzahl der Durchmesser selbst gerade oder ungerade ist. Innerhalb der Grenzen der Anwendbarkeit von (4) erkennen wir demnach, dass die Tonhöhe ungeändert bleibt, wenn irgend eine Zahl von h abgezogen wird, vorausgesetzt, dass man die doppelte Zahl zu n hinzufügt. Dieses Gesetz, von dem die folgende Tabelle einige Anwendungen zeigt, kann in der Weise ausgedrückt werden, dass man sagt: Kreisknotenlinien haben in Betreff der Erhöhung des Tones die doppelte Wirkung wie Durchmesserknotenlinien. Wahrscheinlich haben indessen, genau gesprochen, keine zwei Normalcomponenten genau dieselbe Tonhöhe.

h	$n = 0$			$n = 1$		
	Ch.	P.	W.	Ch.	P.	W.
0	...	...	...	...	...	...
1	Gis	Gis +	A +	b	h —	c —
2	gis′ +	b′ —	b′ +	e″ +	f″ +	fis″ +

h	$n = 2$			$n = 3$		
	Ch.	P.	W.	Ch.	P.	W.
0	C	C	C	d	dis —	dis —
1	g′	gis′ +	a′ —	d″. dis″	dis″ +	e″ —

Die Tabelle, welche der Arbeit Kirckhoff's entnommen ist, giebt die Tonhöhen der wichtigeren Obertöne einer frei schwingenden kreisförmigen Platte, deren tiefster Ton als C an-

genommen ist. Die drei Columnen unter den Ueberschriften *Ch*, *P*, *W* beziehen sich resp. auf die Resultate, wie sie von Chladni beobachtet und anderenseits aus der Theorie mittelst der Poisson'schen und Werthheim'schen Werthe von μ berechnet sind. Ein Pluszeichen bedeutet, dass die wirkliche Tonhöhe ein klein wenig höher, und ein Minuszeichen, dass sie ein klein wenig tiefer ist wie die hingeschriebene. Die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung sind beträchtlich, aber vielleicht nicht grösser als wie sich dieselben durch Unregelmässigkeiten in der Platte erklären lassen.

220. Die Radien der Kreisknotenlinien wurden für den symmetrischen Fall ($n = 0$) von Poisson berechnet und mit den Resultaten verglichen, die Savart experimentell erhalten. Die folgenden Zahlen sind einer Arbeit von Strehlke[1]) entnommen, der einige sorgfältige Messungen anstellte. Der Radius der Scheibe wurde als Einheit gewählt.

	Beobachtet	Berechnet
Ein Kreis	0,67815	0,68062
Zwei Kreise	0,39133	0,39151
	0,84149	0,84200
Drei Kreise	0,25631	0,25679
	0,59107	0,59147
	0,89360	0,89381.

Die berechneten Resultate scheinen sich auf Poisson's Werth für μ zu beziehen; sie würden aber wenig abweichen, wenn Werthheim's Werth genommen würde.

Die folgende Tabelle giebt einen Vergleich von Kirchhoff's Theorie (n nicht Null) mit Messungen, die Strehlke an weniger genauen Scheiben machte:

---

[1]) Pogg. Ann. XCV, S. 577. 1855.

Radien der kreisförmigen Knotenlinien.

	Beobachtet	Berechnet	
		$\mu = \frac{1}{4}$ (P.)	$\mu = \frac{1}{3}$ (W.)
$n = 1, h = 1$	0,781 0,783 0,781 0,783	0,78136	0,78088
$n = 2, h = 1$	0,79 0,81 0,82	0,82194	0,82274
$n = 3, h = 1$	0,838 0,842	0,84523	0,84681
$n = 1, h = 2$	0,488 0,492	0,49774	0,49715
	0,869 0,869	0,87057	0,87015

221. Ist die Platte wirklich symmetrisch, so giebt die Theorie an und der Versuch bestätigt es, dass, gleichviel ob die Platte gleichförmig ist oder nicht, die Lage der Durchmesserknotenlinien beliebig ist, oder besser nur von der Art und Weise abhängt, wie die Platte gehalten wird. Durch Aenderung des Unterstützungspunktes kann jeder beliebige Durchmesser zu einer Knotenlinie gemacht werden. Anders ist es im Allgemeinen, so wie eine merkliche Abweichung von genauer Symmetrie vorhanden ist. Die zwei Schwingungsarten, die ursprünglich wegen der Gleichheit ihrer Perioden in jedem Verhältniss mit einander vereinigt werden konnten, ohne dabei aufzuhören, einfach harmonisch zu bleiben, sind jetzt getrennt und besitzen verschiedene Perioden. Zu gleicher Zeit wird die Lage der Knotenliniendurchmesser eine bestimmte, oder besser auf zwei Alternativen begrenzt. Der eine Satz von Knotenlinien lässt sich von dem andern durch eine Drehung um den halben, von zwei an einander liegenden Durchmessern desselben Satzes eingeschlossenen, Winkel ableiten. Dies setzt aber voraus, dass die Abweichung von der Gleichförmigkeit klein ist; sonst ist das System der Knotenlinien nicht länger mehr nur aus angenäherten Kreisen und Durchmessern zusammengesetzt. Die Ursache der Abweichung kann eine Unregelmässigkeit ent-

weder im Material, oder in der Dicke oder in der Form der Begrenzung sein. Die Einwirkung einer kleinen Belastung in irgend einem Punkte der Platte kann wie in dem analogen Problem bei einer Membran §. 208 untersucht werden. Liegt die Stelle, wo das Gewicht angebracht ist, nicht auf einer Kreisknotenlinie, so werden die Normalschwingungstypen durch dieselbe bestimmt. Das System der Durchmesser, welches einem der Typen entspricht, geht durch die fragliche Stelle, für diesen Typus bleibt die Periode ungeändert. Die Periode des anderen Schwingungstypus wächst.

Die allgemeinste Lösung der gleichförmigen, kreisförmigen Platte wird durch die Uebereinanderlagerung der schon untersuchten Normalcomponenten mit willkürlichen Amplituden und Phasen erhalten. Die Bestimmung der beliebigen Anfangsverschiebungen und Geschwindigkeiten entsprechenden Amplitude und Phase wird genau wie in dem correspondirenden Problem für die Membran bewirkt mittelst der in §. 217 bewiesenen charakteristischen Eigenschaft der Normalfunctionen.

Die zwei anderen Fälle einer kreisförmigen Platte, bei welchen die Kanten entweder festgeklemmt oder gehalten sind, würden für die theoretische Behandlung leichter sein, wie der vorhergehende Fall; sie sind aber von geringerem praktischen Interesse wegen der Schwierigkeit, experimentell die angenommenen Bedingungen zu erfüllen. Das allgemeine Resultat, dass das System der Knotenlinien aus concentrischen Kreisen und symmetrisch vertheilten Durchmessern zusammengesetzt ist, lässt sich auf alle drei Fälle anwenden.

222. Wir sahen, dass im Allgemeinen Chladni's Figuren, wie sie durch den Sand dargestellt werden, mit den Kreisen und Durchmessern der Theorie sehr nahe übereinstimmen. In gewissen Fällen treten aber Abweichungen auf, welche gewöhnlich Unregelmässigkeiten in der Platte zugeschrieben werden. Man muss indessen daran denken, dass die durch einen Bogen erregten Schwingungen genau gesprochen nicht frei sind und dass ihre Perioden daher einer gewissen Modification unterliegen. Es kann sein, dass unter der Einwirkung des Bogens

zwei oder mehr Normalschwingungscomponenten zusammen bestehen. Die ganze Bewegung kann durch die Wirkung der äussern Kraft einfach harmonisch sein, obgleich die natürlichen Perioden etwas von einander verschieden sind. Solch eine Erklärung ist durch den regelmässigen Charakter der Figuren, den letztere in gewissen Fällen annehmen, angezeigt.

Ein anderer Grund für die Abweichung kann vielleicht in der Art und Weise gesucht werden, wie man die Platten hält. Die Anforderungen der Theorie kann man bei dem wirklichen Experiment oft schwer erfüllen. Wenn dem so ist, so müssen wir mit einer unvollkommenen Uebereinstimmung zufrieden sein; wir müssen aber auch daran denken, dass eine Abweichung ebenso gut Schuld des Experimentes wie der Theorie sein kann.

223. Den ersten Versuch, das Problem, mit dem wir eben zu thun haben, zu lösen, verdankt man Sophie Germain, welcher es gelang, die richtigen Differentialgleichungen aufzustellen; sie wurde aber zu irrigen Grenzbedingungen geführt. Für eine freie Platte bietet in der That der letztere Theil des Problems beträchtliche Schwierigkeiten. In Poisson's Arbeit „*Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*“ [1]) giebt der eminente Mathematiker drei Gleichungen an, welche an allen Punkten einer freien Kante erfüllt werden müssen; indessen zeigte Kirchhoff, dass es im Allgemeinen unmöglich ist, diese alle drei zu erfüllen. Eine Ausnahme hiervon tritt ein bei den symmetrischen Schwingungen einer kreisförmigen Platte, wenn eine der Gleichungen genau identisch ist. Für diesen speciellen Fall ist Poisson's Theorie der symmetrischen Schwingungen correct, ungeachtet des Irrthums bei seiner Ansicht über die Grenzbedingungen. Im Jahre 1850 wurde der Gegenstand von Kirchhoff [2]) wieder aufgenommen, der zuerst die zwei zu einer freien Kante gehörigen Gleichun-

---

[1]) *Mém. de l'Acad. d. Sc. à Par.* 1829.

[2]) Crelle, t. XL, p. 51. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.

gen gab und die Theorie der Schwingungen einer kreisförmigen Scheibe vervollständigte.

224. Die Richtigkeit der Kirchhoff'schen Grenzbedingungen wurde von Mathieu[1]) angefochten, welcher einen andern Satz von Differentialgleichungen aufstellte, ohne anzugeben, worin nach seiner Ansicht der Irrthum Kirchhoff's liege. Mathieu beweist, dass, wenn u und u' zwei Normalfunctionen sind, so dass $w = u \cos pt$, $w = u' \cos p't$ mögliche Schwingungen darstellen, folgende Gleichung gültig ist:

$$(p^2 - p'^2)\int\int uu'\, dx\, dy$$
$$= c^4 \int ds \left\{ u' \frac{d\nabla^2 u}{dn} - \nabla^2 u \frac{du'}{dn} - \nabla^2 u' \frac{du}{dn} + u \frac{d\nabla^2 u'}{dn} \right\} \,..(1).$$

Dies ergiebt sich, wenn man zugiebt, dass u und u' resp. folgenden Gleichungen genügen:

$$c^4 \nabla^4 u = p^2 u, \; c^4 \nabla^4 u' = p'^2 u'.$$

Da das Glied linker Hand gleich Null ist, so muss dasselbe für das Glied rechter Hand der Fall sein; und dies kann nach Mathieu nicht eintreten, wenn nicht in allen Punkten der Begrenzung sowohl u wie u' einem der vier folgenden Gleichungspaare genügen:

$$\left.\begin{array}{r} u = 0 \\ \frac{du}{dn} = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} \nabla^2 u = 0 \\ \frac{d\nabla^2 u}{dn} = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} u = 0 \\ \nabla^2 u = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} \frac{du}{dn} = 0 \\ \frac{d\nabla^2 u}{dn} = 0 \end{array}\right\}.$$

Das zweite Paar scheint für eine freie Kante das angemessenste zu sein; indessen ergiebt sich, dass dasselbe zu einer Unmöglichkeit führt. Da das erste und das dritte Paar augenscheinlich unzulässig sind, schliesst Mathieu, dass das vierte Gleichungspaar dasjenige sein muss, welches wirklich die Bedingungen einer freien Kante ausdrückt. In seinem Vertrauen

[1]) Lionville, t. XIV, 1869.

auf dieses Resultat wird er durch die Thatsache nicht schwankend gemacht, dass für ein freies Ende eines Stabes die entsprechenden Bedingungen sein würden:

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = 0,$$

von welchen die erste im directen Gegensatz zu den rohesten Beobachtungen der Schwingungen einer grossen Stimmgabel steht.

Die richtige Thatsache ist die, dass, wenn auch jede von den vier Gleichungspaaren das Verschwinden des Grenzintegrals in (1) sicher macht, es nicht umgekehrt hieraus folgt, dass das Integral auf keinem andern Weg zum Verschwinden gebracht werden kann; und dieser Schluss wird durch Kirchhoff's Untersuchung als ungültig nachgewiesen. Es giebt ausserdem noch eine unzählige Menge anderer Fälle, in denen das fragliche Integral verschwinden würde, wobei wirklich nothwendig nur das ist, dass die der Grenze anliegenden Theile entweder in Ruhe oder ohne Trägheit sind.

225. Die Schwingungen einer rechteckigen Platte, deren Kanten gehalten werden, können theoretisch leicht untersucht werden, da die Normalfunctionen hierfür mit denjenigen identisch sind, welche sich auf eine Membran von derselben Gestalt, deren Begrenzung fest ist, anwenden lassen. Nehmen wir an:

$$w = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos pt \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

so sehen wir, dass in allen Punkten der Begrenzung:

$$w = 0, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2w}{dy^2} = 0,$$

welches die Erfüllung der nothwendigen Bedingungen (§. 215) sichert. Der Werth von p, wie er sich durch Einsetzung des obigen Ausdruckes für w in $c^4\nabla^4 w = p^2 w$ ergiebt, lautet:

$$p = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

hieraus geht hervor, dass die Analogie mit der Membran sich nicht auf die Reihe der auf einander folgenden Töne erstreckt.

Es ist nicht nöthig, hier die Discussion der primären und der dann folgenden Systeme von Knotenlinien, welche in Capitel IX gegeben wurde, zu wiederholen. Die Bemerkung genügt, dass, wenn zwei der Fundamentalschwingungsarten (1) dieselbe Periode bei einer Membran besitzen, sie auch dieselbe Periode bei einer Platte haben müssen. Die entsprechenden Systeme von Knotenlinien sind demgemäss in den beiden Fällen identisch.

Die Allgemeinheit des Werthes von w, welchen man erhält, wenn man alle möglichen Particularlösungen von der Form (1) mit willkürlichen Amplituden und Phasen zusammensetzt, erfordert keine neue Discussion.

Wenn nicht die entgegengesetzte Behauptung aufgestellt wäre, so würde die Bemerkung unnöthig erscheinen, dass die Knotenlinien einer gehaltenen Platte nichts zu thun haben mit den gewöhnlichen Chladni'schen Klangfiguren, die zu einer Platte gehören, deren Kanten frei sind.

Die Verwirklichung der Bedingungen für eine gehaltene Kante ist praktisch kaum erreichbar. Es sind dazu Vorrichtungen nöthig, welche es ermöglichen, die Begrenzung der Platte in Ruhe zu halten, und doch der Art sind, dass dieselben keine Veranlassung zur Entstehung von Kräftepaaren um tangentiale Axen geben. Wir können uns etwa denken, dass die Platte an ihrem Platze durch Reibung wider die Wände eines jene dicht umgebenden Cylinders gehalten wird.

226. Das Problem einer rechtwinkligen Platte, deren Kanten frei sind, zeigt grosse Schwierigkeiten, und hat zum grössten Theil den bisherigen Versuchen es zu bewältigen widerstanden. Nehmen wir an, dass die Verschiebung w unabhängig von y ist, so wird die allgemeine Differentialgleichung identisch mit der, welche wir in Capitel VIII vornahmen. Wählen wir die Lösung, die einem Stabe, dessen Enden frei sind, entspricht und daher den beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d x^3} = 0$$

genügt, wenn $x = 0$ und $x = a$ ist, so erhalten wir einen Werth für w, der ebensowohl die allgemeine Differentialgleichung erfüllt, als das folgende Paar der Grenzgleichungen, die den mit y parallelen Kanten zukommen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^2 w}{dx^2} + (2-\mu)\frac{d^2 w}{dy^2}\right\} &= 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{d^2 w}{dy^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Dagegen wird die zweite Grenzbedingung für das andere Kantenpaar, nämlich:

$$\frac{d^2 w}{d y^2} + \mu \frac{d^2 w}{d x^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

verletzt, wenn nicht $\mu = 0$ ist. Das zeigt, dass, ausgenommen den einen eben reservierten Fall, eine freie rechtwinklige Platte nicht in der Art eines Stabes schwingen kann. Als eine Annäherung kann eine solche Uebereinstimmung allerdings dann angenommen werden, wenn die parallel dem einen Kantenpaar gerechnete Länge so gross ist, dass die in dem zweiten Kantenpaar zu erfüllenden Bedingungen vernachlässigt werden können.

Wenn auch die Constante μ (die das Verhältniss der Seitencontraction zur Längendilatation angiebt, wenn ein Stab ausgezogen wird) für alle bekannten Substanzen positiv ist, so ist sie bei einigen wenigen Substanzen — Kork z. B. — verhältnissmässig sehr klein. Es liegt, soweit unsere Kenntnisse reichen, nichts Absurdes in dem Gedanken an eine Substanz, für welche μ verschwindet. Eine Untersuchung des durch diese Annahme vereinfachten Problems entbehrt daher nicht des Interesses, wenn auch die Resultate auf gewöhnliche Glas- oder Metallplatten, für die der Werth von μ ungefähr $\frac{1}{3}$ ist, nicht genau anwendbar sind [1]).

---

[1]) Um eine Platte, für welche μ nicht gleich Null ist, wie einen Stab schwingen zu lassen, ist es nöthig, von aussen Kräftepaare parallel der Biegungsebene auf die Kanten wirken zu lassen, um der Entstehung

Bezeichnen u_1, u_2 etc. die Normalfunctionen für einen freien Stab, die 2, 3 . . . Knotenlinien entsprechen (die Untersuchung dieser Functionen geschah in Capitel VIII), so sind die Schwingungen einer rechtwinkligen Platte ausgedrückt durch:

$$w = u_1 \left(\frac{x}{a}\right), \quad w = u_2 \left(\frac{x}{a}\right) \text{ etc.}$$

$$w = u_1 \left(\frac{y}{b}\right), \quad w = u_2 \left(\frac{y}{b}\right) \text{ etc.}$$

Bei jeder von diesen Grundarten von Schwingungen ist das System der Knotenlinien zusammengesetzt aus geraden Linien, die parallel einer oder der andern Kante des Rechtecks laufen. Ist $b = a$, so wird das Rechteck ein Quadrat, die Schwingungen

$$w = u_n \left(\frac{x}{a}\right), \quad w = u_n \left(\frac{y}{a}\right)$$

haben nothwendiger Weise dieselbe Periode; sie können daher in jedem Verhältniss zusammengesetzt werden, während die ganze Bewegung noch einfach harmonisch bleibt. Welches auch das Verhältniss sein mag, die resultirende Knotenlinie geht nothwendiger Weise durch die durch folgende Gleichungen bestimmten Punkte:

$$u_n \left(\frac{x}{a}\right) = 0, \quad u_n \left(\frac{y}{a}\right) = 0.$$

Wir wollen jetzt specieller den Fall besprechen, in welchem $n = 1$ ist. Das Knotenliniensystem der ersten Art $w = u_1 \left(\frac{x}{a}\right)$ besteht aus einem Paar von geraden Linien, die parallel y sind und deren Abstand von der nächsten Kante gleich $0{,}2242\,a$ ist. Die Punkte, in denen diese Linien von dem entsprechen-

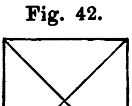
einer diesen entgegenstehenden Krümmung vorzubeugen. Die Wirkung dieser Kräftepaare ist eine Erhöhung der Tonhöhe, daher führt die auf dem $\mu = 0$ eigenen Schwingungstypus gestützte Berechnung zu einem Resultat, das die Tonhöhe etwas höher angiebt wie dieselbe in Wirklichkeit ist.

den Linienpaar für $w = u_1\left(\frac{y}{a}\right)$ geschnitten werden, sind diejenigen, durch welche die Knotenlinie der zusammengesetzten Linie in allen Fällen hindurchgehen muss. Es ist klar, dass dieselben symmetrisch um die Diagonale des Quadrates angéordnet sind. Werden die beiden Fundamentalschwingungen gleich gross, aber mit entgegengesetzter Phase genommen (oder algebraisch, mit gleich grossen und entgegengesetzten Amplituden), so haben wir:

$$w = u_1\left(\frac{x}{a}\right) - u_1\left(\frac{y}{a}\right) \quad \dots\dots\dots \quad (3),$$

woraus sich direct ergiebt, dass w verschwindet, wenn $x = y$, das ist in allen Punkten der Diagonale, die durch den Anfangspunkt hindurchgeht. Dass w ebenso längs der andern Diagonale verschwindet, folgt aus der Symmetrie der Functionen, wir schliessen hieraus, dass das Knotenliniensystem von (3) beide Diagonalen (Fig. 42) umfasst. Das ist eine wohlbekannte Schwingungsart von quadratischen Platten.

Fig. 42.



Ein zweiter bemerkenswerther Fall tritt ein, wenn die Amplituden einander gleich und ihre Phasen dieselben sind, so dass:

$$w = u_1\left(\frac{x}{a}\right) + u_1\left(\frac{y}{a}\right) \quad \dots\dots\dots \quad (4).$$

Die zweckmässigste Methode, die Curven, für welche $w = const$ ist, graphisch zu construiren, ist die von Maxwell in ähnlichen Fällen benutzte. Die zwei Systeme von Curven (in diesem Falle gerade Linien), welche durch $u_1\left(\frac{x}{a}\right) = const$, $u_1\left(\frac{y}{a}\right) = const$ dargestellt sind, werden zunächst aufgezeichnet, wobei die Werthe der Constanten eine arithmetische Progression bilden mit derselben gemeinsamen Differenz in den beiden Fällen. Auf diese Weise erhält man ein Netzwerk, das von den gesuchten Curven diagonaliter durchschnitten wird. Die Ausführung dieses Planes erfordert eine Umkehrung der

in Capitel VIII §. 178 gegebenen Tabelle, welche den Gang der Function u_1 angiebt. Das Resustat dieser Umkehrung lautet:

u_1	$x : a$	u_1	$x : a$
+ 1,00	0,5000	— 0,25	0,1871
0,75	0,3680	0,50	0,1518
0,50	0,3106	0,75	0,1179
0,25	0,2647	1,00	0,0846
0,00	0,2242	1,25	0,0517
		— 1,50	0,0190

Das System von Linien, welches durch die obigen Werthe von x (die zu beiden Seiten der Centrallinie vollkommen symmetrisch sind) angegeben wird, und das entsprechende System für y sind in Fig. 43 gezeichnet. Hieraus sind die Curven gleicher Verschiebungen abgeleitet. Im Centrum des Quadrates hat w ein Maximum und ist nach der angenommenen Scala gleich 2. Die erste darauf folgende Curve ist der Ort der Punkte, für welche $w = 1$. Die nächste Curve ist die Knotenlinie, welche die Stellen mit entgegengesetzten Verschiebungen trennt. Die übrigen Curven geben der Reihe nach die Verschiebungen — 1, — 2, — 3. Die numerisch grösste negative Verschiebung tritt an den Ecken des Quadrates ein, wo sie gleich $2 \times 1{,}645 = 3{,}290$ ist [1]).

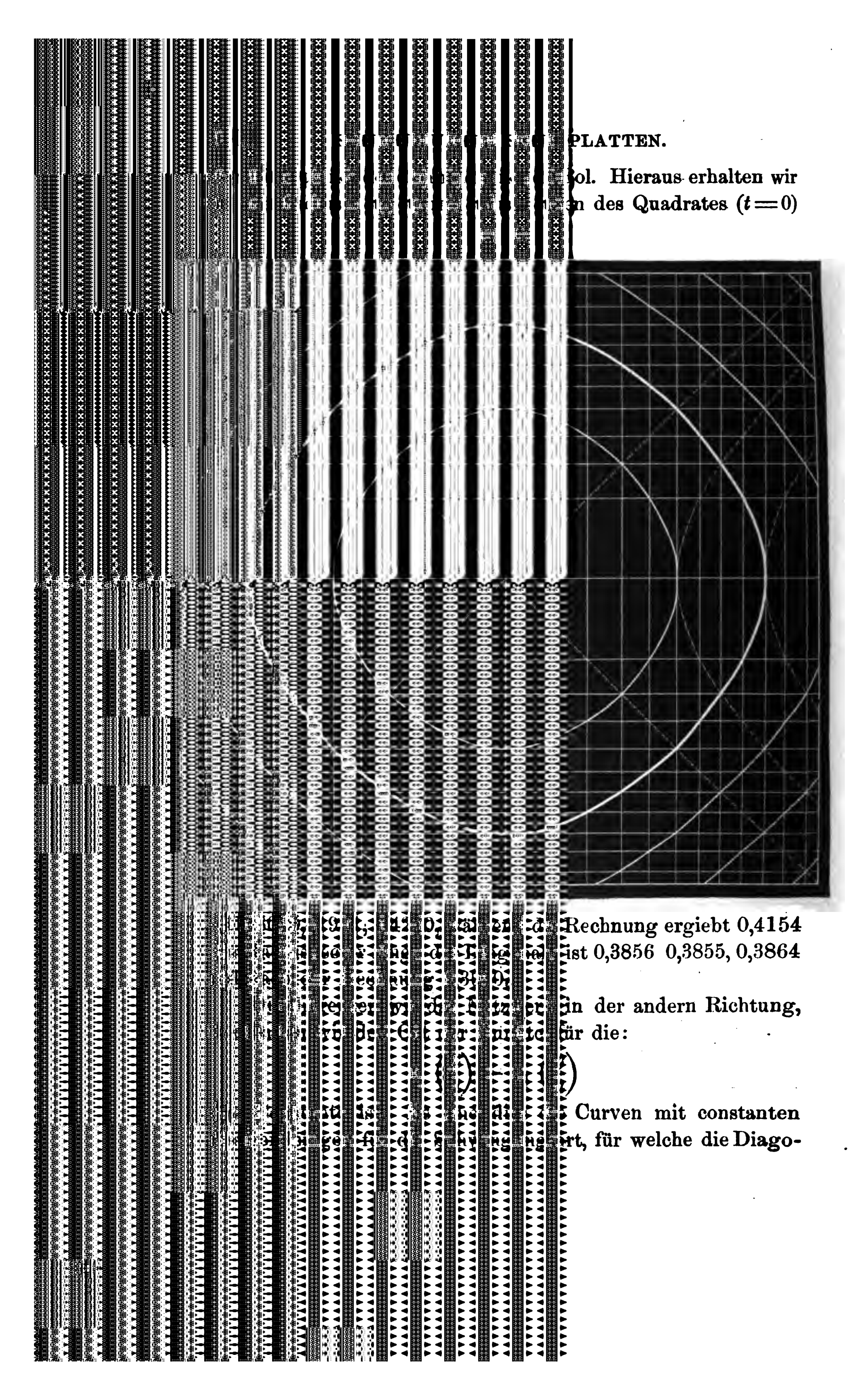
Die so construirte Knotenlinie stimmt sehr nahe mit den Beobachtungen von Strehlke [2]) überein. Die Resultate des Letztern, welche sich auf drei sorgsam gearbeitete Glasplatten beziehen, sind in den folgenden Polargleichungen enthalten:

$$r = \begin{matrix} 0{,}40143 \\ 0{,}40143 \\ 0{,}4019 \end{matrix} + \left.\begin{matrix} 0{,}0171 \\ 0{,}0172 \\ 0{,}0168 \end{matrix}\right\} \cos 4t + \left.\begin{matrix} 0{,}00127 \\ 0{,}00127 \\ 0{,}0013 \end{matrix}\right\} \cos 8t,$$

---

1) *On the nodal lines of a square plate. Phil. Mag.* August, 1873.

2) Pogg. Ann. Bd. CXLVI, S. 319.



PLATTEN.

ol. Hieraus erhalten wir

n des Quadrates ($t = 0$)

Rechnung ergiebt 0,4154

ist 0,3856 0,3855, 0,3864

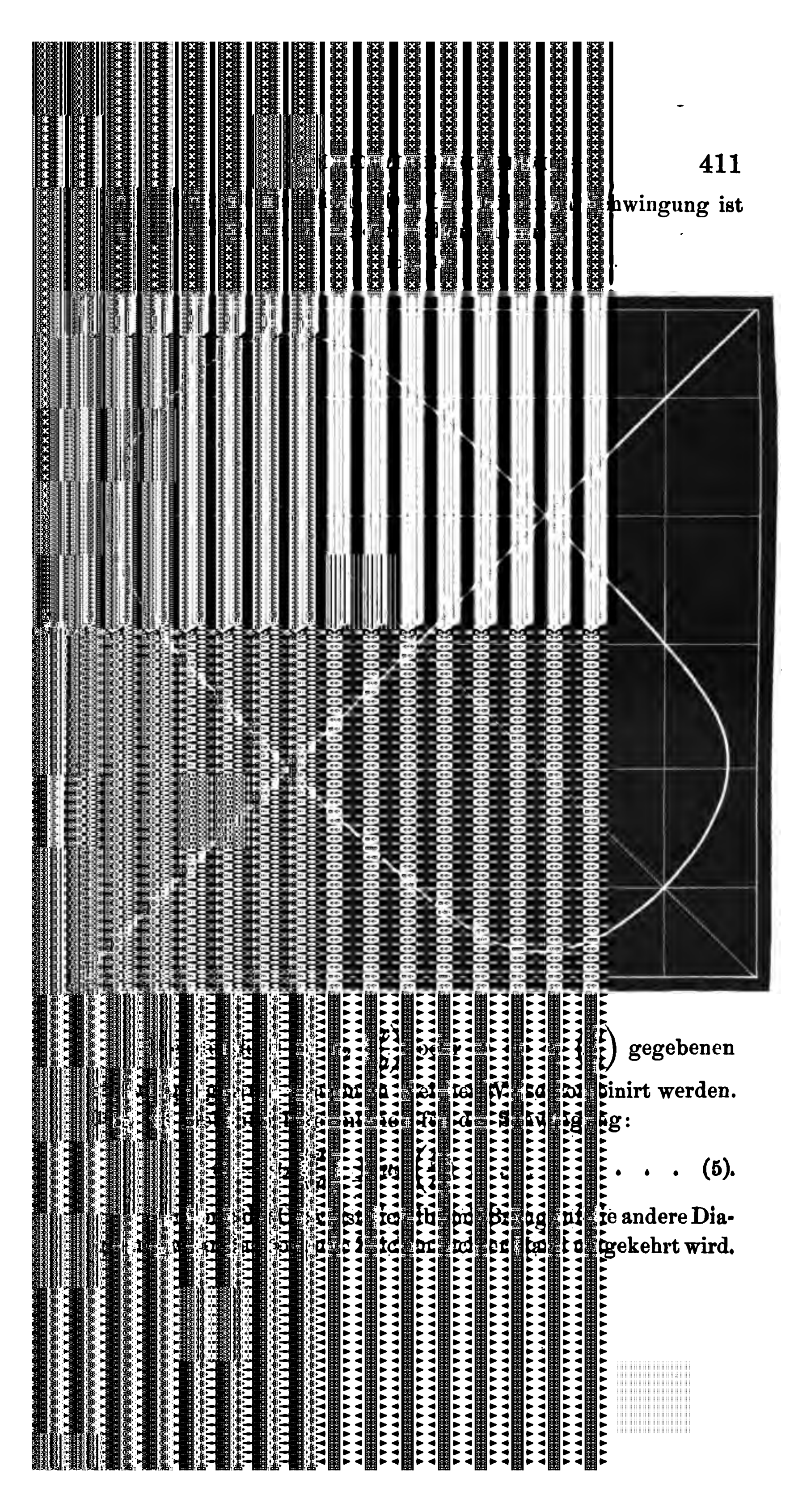
in der andern Richtung,

ür die:

Curven mit constanten

rt, für welche die Diago-

[illegible] hwingung ist



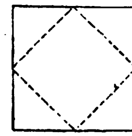
[illegible] gegebenen
[illegible] binirt werden.
[illegible] g:

[illegible] . . . (5).

[illegible] e andere Dia-
[illegible] gekehrt wird.

227. Die Methode der Superposition hängt in Betreff ihrer Anwendbarkeit von keiner particulären Form der Normalfunctionen ab. Welches auch die Form sein mag, die Schwingungsart, welche für den Fall, dass $\mu = 0$, in die eben besprochene übergeht, muss dieselbe Periode haben, ob nun die angenähert geraden Knotenlinien parallel mit x oder y sind. Ueberlagern sich die beiden synchronen Schwingungen, so besitzt die Resultante noch dieselbe Periode; den allgemeinen Verlauf des Systems der Knotenlinien kann man sich aus der Ueberlegung vorstellen, dass kein Punkt der Platte, bei welchem die Fundamentalschwingungen dasselbe Zeichen haben, ein Knotenpunkt sein kann. Um genau die Linie zu bestimmen, wo die beiden Schwingungen sich aufheben, dazu würde im Allgemeinen eine vollständige Kenntniss der fundamentalen Normalfunctionen und nicht allein der Punkte, wo dieselben verschwinden, nöthig sein. Es scheint, dass Dr. Young und die Gebrüder Weber schon die Idee davon gehabt haben, dass eine Uebereinanderlagerung neue Aenderungen in der Schwingungart hervorrufen kann; wir verdanken aber Sir Charles Wheatstone[1]) die erste systematische Anwendung dieses Gedankens auf die Erklärung der Chladni'schen Klangfiguren. Die von Wheatstone wirklich erhaltenen Resultate lassen sich indessen nur in sehr roher Weise auf eine Platte anwenden, in Folge der Form der stillschweigend angenommenen Normalfunctionen. An Stelle von Fig. 43 (die selbst, wie erinnerlich, nur eine Annäherung ist) findet Wheatstone für die Knotenlinie der zusammengesetzten Schwingung das in Fig. 45 gezeichnete eingeschriebene Quadrat.

Fig. 45.



Diese Form findet sich wirklich wieder, nicht bei einer vermöge ihrer Steifigkeit schwingenden Platte, sondern bei einer gespannten Membran, die so gehalten wird, dass jeder Punkt des Umfanges frei längs Linien schwingen kann, die senkrecht zur Ebene der Membran sind. Die unter diesen

[1]) Phil. Trans. 1833.

Umständen anwendbare Grenzbedingung lautet $\frac{dw}{dn} = 0$; es ist leicht zu zeigen, dass die Normalfunctionen, welche nur eine Coordinate enthalten, sind: $w = \cos\left(m\frac{\pi x}{a}\right)$ oder $w = \cos\left(m\frac{\pi y}{a}\right)$, wenn der Anfangspunkt in einer Ecke des Quadrates liegt. Daher sind bei der Schwingung:

$$w = \cos\frac{2\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

die Knotenlinien durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\cos\frac{\pi(x+y)}{a}\cos\frac{\pi(x-y)}{a} = 0,$$

woraus $x + y = \frac{1}{2}a$ oder $\frac{3}{2}a$, oder $x - y = \pm\frac{1}{2}a$, Gleichungen, die das eingeschriebene Quadrat darstellen.

Wenn:

$$w = \cos\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

so setzt sich das System der Knotenlinien aus den beiden Diagonalen zusammen. Dieses Resultat, das nur von der Symmetrie der Normalfunctionen abhängt, lässt sich genau auf eine quadratische Platte anwenden.

Ist $m = 3$, so haben wir:

$$w = \cos\frac{3\pi x}{a} + \cos\frac{3\pi y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

die Gleichungen der Knotenlinien sind:

$$x + y = \frac{a}{3},\ a,\ \frac{5a}{3};\quad x - y = \pm\frac{a}{3}.$$

Die Knotenlinien sind in Fig. 46 (a. f. S.) zu sehen. Wird das andere Zeichen gewählt, so erhält man eine ähnliche Figur mit Bezug auf die andere Diagonale.

Ist $m = 4$, so haben wir:

$$w = \cos\frac{4\pi x}{a} + \cos\frac{4\pi y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Das giebt die in Fig. 47 gezeichneten Knotenlinien:

$$x + y = \frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{5a}{4}, \frac{7a}{4}; \quad x - y = \pm \frac{a}{4}, \pm \frac{3a}{4}.$$

Fig. 46. Fig. 47. Fig. 48.

Mit dem andern Zeichen:

$$w = \cos \frac{4\pi x}{a} - \cos \frac{4\pi y}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

erhalten wir:

$$x + y = \frac{a}{2}, a, \frac{3a}{2}; \quad x - y = 0, \pm \frac{a}{2} \text{ (Fig. 48)}.$$

Die Knotenlinien bilden ein System, das sich aus den Diagonalen und dem eingeschriebenen Quadrat zusammensetzt.

Diesen Formen, welche genau anwendbar sind bei einer Membran, gleichen die durch Sand auf einer quadratischen Platte erhaltenen Figuren mehr, wie man hätte erwarten sollen. Die Reihe der aufeinander folgenden Töne ist indessen eine ganz andere. Aus §. 176 ersehen wir, dass wenn μ gleich Null wäre, das Intervall zwischen der aus drei Fundamentalschwingungsarten abgeleiteten Form (44) und den aus zwei Arten abgeleiteten Formen (42) oder (43) gleich 1,4629 Octaven sein würde. Das Intervall zwischen (42) oder (43) und (47) oder (48) würde 2,4358 Octaven betragen. Welches auch der Werth von μ sein mag, den Formen (42) und (43) würde genau dieselbe Tonhöhe zukommen; dasselbe gilt für (47) und (48). Bei dem erst erwähnten Paar steht dieses Resultat nicht in Uebereinstimmung mit den Chladni'schen Beobachtungen. Chladni fand eine Differenz von mehr wie einem Ton; (43) gab den höhern Ton. Wird indessen (43) nicht berücksichtigt, so giebt die Vergleichung zufriedenstellendere Resultate. Nach der Theorie (bei welcher $\mu = 0$ gesetzt wird) würden, wenn (42)

d giebt; (43) *g′* —, und (47), (48) *g″* + geben. Chladni fand für (44) *gis′* und für (47), (48) resp. *gis″* und *gis″* +.

228. Es ist jetzt noch die tiefste Schwingungsart einer quadratischen Platte zu betrachten. Die Knotenlinien sind in diesem Falle die durch die Mittelpunkte gegenüberstehender Seiten gezogenen Linien. Dass eine solche Schwingungsart existiren muss, ergiebt sich sofort aus Symmetriegründen; bis jetzt ist aber weder die Form der Normalfunctionen noch die Tonhöhe bestimmt, selbst nicht für den particulären Fall $\mu = 0$. Man kann indessen eine rohe Berechnung auf einen hypothetischen Schwingungstypus begründen.

Nehmen wir die Knotenlinien als Axen, so genügt die Form $w = xy$ sowohl $\nabla^4 w = 0$ als auch den einer freien Kante zukommenden Grenzbedingungen in allen Punkten der Umfassung mit Ausnahme der vorhandenen Ecken. Es giebt obige Gleichung in der That die Form an, welche die Platte annehmen würde, wenn sie durch vier numerisch gleiche Kräfte, die an den Ecken senkrecht zur Ebene der Platte angreifen, in Ruhe gehalten würde. Dabei müssen die an den Enden der einen Diagonale befindlichen Kräfte nach der einen Richtung und die an den Enden der andern Diagonale nach der entgegengesetzten Richtung wirken. Hieraus folgt, dass $w = xy \cos pt$ als Schwingungsart möglich wäre, wenn die Masse der Platte gleichmässig in den vier Ecken concentrirt wäre. Aus (3), §. 214, ersehen wir, dass;

$$V = \frac{q\, b^3 a^2}{12\,(1+\mu)} \cos^2 pt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

insoweit als:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx\,dy} = \cos pt.$$

Für die kinetische Energie haben wir, wenn ρ die Volumendichtigkeit und M die in jeder Ecke aufgehäufte Masse bezeichnet:

$$T = \frac{1}{2} p^2 \sin^2 pt \left\{ \int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \int\limits_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} \varrho b\, x^2 y^2\, dx\, dy + \frac{1}{4} Ma^4 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} p^2 \sin^2 pt \left\{ \frac{\varrho b a^6}{16 \times 9} + \frac{a^4}{4} M \right\} \quad \ldots\ldots (2).$$

Hieraus:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\varrho (1 + \mu) a^4}{24 q b^2} \left(1 + 36 \frac{M}{M'}\right) \quad \ldots\ldots (3),$$

worin M' die Masse der Platte ohne die Gewichte bedeutet. Dieses Resultat wird annähernd genau, wenn M relativ gross ist; sonst ist es nach §. 69 merklich kleiner wie die Wirklichkeit. Aber selbst, wenn $M = 0$, ist der Irrthum wahrscheinlich nicht sehr gross. In diesem Falle würden wir haben:

$$p^2 = \frac{24 q b^2}{\varrho (1 + \mu) a^4} \quad \ldots\ldots (4);$$

es giebt diese Gleichung einen Ton an, der etwas zu hoch ist. Die tiefste Schwingungsart nach dieser ist die, wo die Diagonalen Knotenlinien sind; ihre Tonhöhe würde, wenn $\mu = 0$, gegeben durch:

$$p'^2 = \frac{q b^2}{\varrho a^4} \frac{(4{,}7300)^4}{12} \quad \ldots\ldots (5)$$

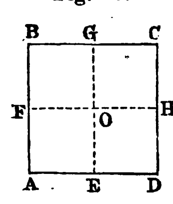
(s. §. 174).

Wenn das Material, aus dem die Platte besteht, der Art ist, dass $\mu = 0$, so ist der Schluss gestattet, dass das Intervall zwischen den beiden tiefsten Tönen etwas grösser wie das durch das Verhältniss 1,318 ausgedrückte ist. Chladni giebt für dieses Intervall eine Quinte an.

229. Dass Schwingungsarten vorhanden sein müssen, für welche die beiden kürzesten Diameter Knotenlinien sind, kann aus Ueberlegungen folgender Art hergeleitet werden. Wir wollen annehmen, dass in Fig. 49 GH eine Platte darstellt, deren Kanten HO, GO gehalten werden, während die Kanten GC, CH frei sind. Diese Platte muss, da sie nach einer bestimmten Gleichgewichtslage strebt, fähig sein, in gewissen fundamentalen Arten zu schwingen. Eine dieser wollen wir als

existirend annehmen, und uns dann eine Vertheilung von w über die drei übrigen Quadranten derart angeordnet denken, dass in je zwei an einander liegenden Quadranten die Werthe von w in denjenigen Punkten, welche als Bilder von einander in Bezug auf die Trennungslinie angesehen werden können, gleich und entgegengesetzt sind. Schwingt die ganze Platte nach dem so bestimmten Gesetz, so ist keine Gebundenheit nöthig, um die Linie GE und FH fest zu halten, daher kann die ganze Platte als frei angesehen werden. Dasselbe Argument kann zu dem Nachweis dienen, dass Schwingungsarten existiren, in welchen die Diagonalen Knotenlinien sind, oder in denen beide, die Diagonalen und die eben betrachteten Durchmesser, zusammen Knotenlinien sind.

Fig. 49.



Das Princip der Symmetrie kann auch auf andere Formen der Platte angewandt werden. Wir können daraus die Möglichkeit von Knotendurchmessern in einem Kreise oder von den Hauptaxen als Knotenlinien in einer Ellipse schliessen. Wenn die Begrenzung ein reguläres Sechseck ist, so lässt sich leicht erkennen, dass die Figuren 50, 51, 52 mögliche Formen darstellen.

Fig. 50.

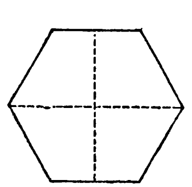


Fig. 51.

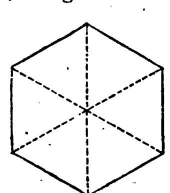
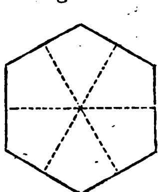


Fig. 52.



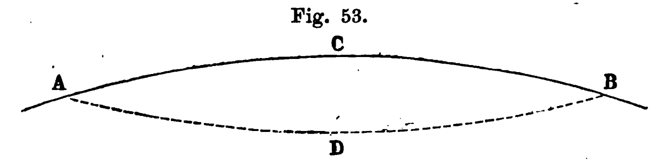
Es ist interessant, die Continuität in den Chladni'schen Klangfiguren, wenn die Form der Platte allmälig geändert wird, zu verfolgen. Bei einem Kreise ist es z. B., wenn zwei senkrecht auf einander stehende Durchmesser als Knotenlinien vorhanden sind, sowohl in Bezug auf die Tonhöhe als auch die Schwingungsart gleichgültig, wo diese Durchmesser liegen. So wie der Kreis sich in ein Quadrat verwandelt, indem man die

Ecken des letzteren auszieht, werden die Lagen dieser Durchmesser bestimmt. In den beiden möglichen Alternativen ist die Höhe der Schwingung verschieden, denn die hervorstehenden Ecken haben in den beiden Fällen nicht dieselbe Wirkung. Die Schwingung einer quadratischen Platte, wie sie in Fig. 43 gezeichnet ist, entspricht der Schwingung eines Kreises, bei dem nur eine kreisförmige Knotenlinie vorhanden ist. Das Correspondiren der tieferen Schwingungsarten eines Rechteckes oder einer Ellipse mit den Schwingungsarten eines Kreises kann auf gleiche Weise skizzirt werden.

230. Für Platten von gleichförmigem Material und Dicke und von unveränderlicher Gestalt ändert sich die Periode der Schwingung bei jeder Fundamentalschwingungsart mit dem Quadrat der linearen Dimensionen, vorausgesetzt natürlich, dass die Grenzbedingungen in allen mit einander verglichenen Fällen dieselben sind. Sind die Kanten festgeklemmt, so können wir weiter gehen und behaupten, dass eine Entfernung jedes äusseren Theiles mit einer Tonerhöhung verbunden ist, ob nun das Material und die Dicke gleichförmig sind oder nicht.

Es sei *A B* ein Theil einer festgeklemmten Kante (es ist von keinem Belang, ob das Uebrige der Begrenzung festgeklemmt ist oder nicht); es werde nun das Stück *A C B D*

Fig. 53.



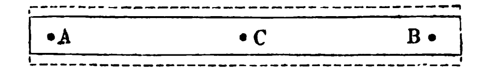
entfernt; die neue Kante *A D B* sei ebenfalls festgeklemmt. Die Tonhöhe jeder Fundamentalschwingung ist höher wie vor der Aenderung. Dies ist evident, da die geänderten Schwingungen aus dem ursprünglichen System dadurch erhalten werden können, dass man eine Gebundenheit einführt, bei welcher die Kante *ADB* festgeklemmt ist. Die Wirkung der Gebundenheit ist die, die Tonhöhe jeder Componente zu steigern; der Theil *A CB D*, der eben ist und während der ganzen Bewegung in Ruhe verharrt, kann dann entfernt

werden. Um die Aufeinanderfolge der Aenderungen mit grösserer Sicherheit vor Irrthümern verfolgen zu können, ist es am besten, die festgeklemmte Linie allmälig in einzelnen Stadien von der Lage *ACB* nach der Lage *ADB* vorzuschieben. Z. B. ist die Thonhöhe einer gleichförmigen festgeklemmten Platte in der Form eines Sechseckes tiefer, wie die des eingeschriebenen Kreises und höher wie die des umschriebenen Kreises.

Ist eine Platte frei, so ist es nicht richtig, dass eine Vergrösserung an einer Kante die Periode immer vergrössert. Um dieses zu beweisen, reicht es hin, einen speciellen Fall zu betrachten.

AB ist eine schmale, dünne Platte, selbst ohne Trägheit; sie trägt aber Gewichte in *A*, *B* und *C*. Es ist klar, dass eine

Fig. 54.



Vergrösserung der Breite, wie dieselbe durch die punktirte Linie angedeutet ist, die Steifigkeit der Platte vergrössern und daher die Schwingungsperiode verkleinern würde. Dieselbe Betrachtung zeigt, dass für eine gleichförmige freie Platte von gegebenem Flächeninhalt keine untere Grenze in der Tonhöhe vorhanden ist. Denn bei hinreichender Verlängerung kann man es dahin bringen, dass die Periode der tiefsten Componente jede angebbare Grösse übertrifft. Sind die Kanten festgeklemmt, so ist die Form für die tiefste Tonhöhe zweifellos der Kreis.

Werden alle Dimensionen der Platte, mit Einschluss der Dicke, in demselben Verhältniss geändert, so ist die Periode proportional den linearen Dimensionen, wie in jedem Fall bei einem festen Körper, der vermöge seiner eigenen Elasticität schwingt.

Die Periode ändert sich andererseits umgekehrt wie die Quadratwurzel aus Young's Modul, wenn μ constant ist und direct wie die Quadratwurzel aus der Masse in der Volumeneinheit der Substanz.

231. Bei seinen Versuchen mit quadratischen Platten von dünnem Holz, dessen Fasern parallel dem einen Seitenpaar liefen, fand Wheatstone [1]), dass die Tonhöhe der Schwingungen verschieden ausfiel, je nachdem die angenähert geraden Knotenlinien parallel oder senkrecht zu der Faser des Holzes waren. Diese Einwirkung hängt von einer Aenderung in dem Biegungswiderstand in den beiden Richtungen ab. Die zwei Sätze von Schwingungen können, da sie verschiedene Schwingungsdauer besitzen, nicht in der gewöhnlichen Weise zusammengesetzt werden; demnach ist es nicht möglich, eine solche Holzplatte in eine Schwingung mit Diagonalen als Knotenlinien zu versetzen. Der Ungleichheit der Perioden kann man indessen dadurch vorbeugen, dass man das Längenverhältniss der Seiten ändert. Dann wird die gewöhnliche Art der Uebereinanderlagerung, welche Diagonalen als Knotenlinien ergiebt, wieder möglich. Dieses wurde durch Wheatstone bestätigt.

Eine weitere Anwendung des Principes der Uebereinanderlagerung verdankt man König [2]). Um zwei Schwingungsarten mit einander zu combiniren, ist es nur nöthig, dass die Perioden übereinstimmen. Nun liegt es auf der Hand, dass man die Seiten einer rechtwinkligen Platte in solch einem Verhältniss zu einander nehmen kann, dass z. B. die Schwingung mit zwei Knotenlinien parallel dem einen Seitenpaar in der Tonhöhe mit der Schwingung übereinstimmt, die drei Knotenlinien parallel dem andern Seitenpaar besitzen. In solch einem Falle entstehen neue Knotenlinienfiguren durch Zusammensetzung von zwei primären Schwingungsarten.

232. Ist die Platte, deren Schwingungen untersucht werden sollen, von Natur schon gekrümmt, so sind die Schwierigkeiten der Frage im Allgemeinen sehr viel grösser. Ein Fall ist aber vorhanden, bei welchem die aus der Krümmung herrührende Complication durch die Abwesenheit einer freien

---

[1]) Phil. Trans. 1833.
[2]) Pogg. Ann. 1864. CXXII, S. 238.

Kante mehr wie compensirt wird. Dieser Fall bietet glücklicher Weise auch ein beträchtliches Interesse dar, da er die beste Darstellung einer Glocke ist, welche bisher eine analytische Behandlung zulässt.

Eine lange cylindrische Hülse von kreisförmigem Querschnitt und gleichförmiger Dicke kann ersichtlich Schwingungen von einem Biegungscharakter ausführen, bei denen die Axe in Ruhe und die Oberfläche cylindrisch bleibt, während die Bewegung jedes Theiles senkrecht zu den erzeugenden Linien ist. Man kann daher das Problem als eines von nur zwei Dimensionen auffassen; es hängt von der Betrachtung der potentiellen und kinetischen Energien der verschiedenen Deformationen ab, deren der Querschnitt fähig ist. Dieselbe Rechnung ist ebenso auf die entsprechenden Schwingungen eines Ringes anwendbar, der durch Umdrehung einer kleinen geschlossenen Fläche um eine ausser ihr liegende Axe gebildet wird.

Der Cylinder oder Ring kann zwei Arten von Schwingungen annehmen, die respective von den Ausdehnungs- und Biegungswiderständen abhängen und analog den longitudinalen und seitlichen Schwingungen von geraden Stäben sind. Ist indessen der Cylinder dünn, so werden die der Biegung widerstehenden Kräfte klein in Vergleich mit denen, mit welchen der Stab sich einer Ausdehnung widersetzt. Wie bei geraden Stäben sind die Schwingungen, welche von der Biegung abhängen, tiefer und wichtiger wie diejenigen, welche ihren Ursprung in dem Widerstand gegen Verlängerung haben. In dem Grenzfall einer unendlich dünnen Hülse (oder Ring) werden die Biegungsschwingungen unabhängig von jeder Ausdehnung des Umfanges als Ganzes und können unter der Voraussetzung berechnet werden, dass jeder Theil des Umfanges seine natürliche Länge während der ganzen Bewegung behält.

Wenn auch die eben betrachteten Schwingungen mit den transversalen Schwingungen von geraden Stäben in Bezug auf die Abhängigkeit von dem Widerstand gegen die Biegung analog sind, so dürfen wir doch nicht in das gewöhnliche Missverständniss fallen, als wenn dieselben ausschliesslich

Schwingungen in Richtung der Normale wären. In der That überzeugt man sich leicht davon, dass eine Bewegung eines Cylinders oder Ringes, bei welcher jedes Theilchen in der Richtung des Radius verschoben würde, mit der Bedingung, dass keine Ausdehnung stattfindet, unverträglich ist. Um diese Bedingung zu erfüllen, muss man jedem Theile des Umfanges sowohl eine tangentiale wie eine normale Bewegung ertheilen, deren relative Grössen einer gewissen Differentialgleichung genügen müssen. Unser erster Schritt soll die Aufsuchung dieser Gleichung sein.

233. Der ursprüngliche Radius des Kreises sei a; die Gleichgewichtslage jedes Elementes in dem Umfang möge durch den Winkel ϑ des Radius Vectors definirt werden. Während der Bewegung mögen die Polarcoordinaten des Elementes übergehen in:

$$r = a + \delta r, \quad \varphi = \vartheta + \delta\vartheta.$$

Stellt ds den Bogen der deformirten Curve dar, welcher $a\,d\vartheta$ entspricht, so haben wir:

$$(ds)^2 = (a\,d\vartheta)^2 = (d\,\delta r)^2 + r^2\,(d\vartheta + d\,\delta\vartheta)^2;$$

woraus sich bei Vernachlässigung der Quadrate der kleinen Grössen δr, $\delta\vartheta$ ergiebt:

$$\frac{\delta r}{a} + \frac{d\,\delta\vartheta}{d\vartheta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

als die gesuchte Relation.

In welcher Weise auch der ursprüngliche Kreis zur Zeit t deformirt sein mag, δr kann nach dem Fourier'schen Satze in die folgende Reihe entwickelt werden:

$$\delta r = a\,\{A_1 \cos\vartheta + B_1 \sin\vartheta + A_2 \cos 2\vartheta + B_2 \sin 2\vartheta + \cdots + A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta + \cdots\} \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

die entsprechende tangentiale Verschiebung, die dazu nothwendig ist, dass keine Ausdehnung eintritt, ist dann:

$$\delta\vartheta = -A_1 \sin\vartheta + B_1 \cos\vartheta + \cdots - \frac{A_n}{n} \sin n\vartheta + \frac{B_n}{n} \cos n\vartheta - \cdots\} \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei die Constante, welche zu $\delta\vartheta$ addirt werden kann, vernachlässigt ist.

Bezeichnet $\sigma a\, d\vartheta$ die Masse des Elementes $a\, d\vartheta$, so wird die kinetische Energie T der ganzen Bewegung sein:

$$T = \frac{1}{2}\sigma a \int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{d\delta r}{dt}\right)^2 + a^2\left(\frac{d\delta\vartheta}{dt}\right)^2\right\} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\pi a^3 \Big\{2(\dot{A}_1^2 + \dot{B}_1^2) + \frac{5}{4}(\dot{A}_2^2 + \dot{B}_2^2) + \cdots$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)(\dot{A}_n^2 + \dot{B}_n^2) + \cdots\Big\} \quad . . (4);$$

die Producte der Coordinaten A_n, B_n verschwinden bei der Integration.

Wir haben jetzt die Form der potentiellen Energie V zu berechnen. Es sei ϱ der Krümmungsradius irgend eines Elementes ds, dann können wir für das entsprechende Element von V nehmen $\frac{1}{2} B\, ds \left(\delta \frac{1}{\varrho}\right)^2$, worin B eine von dem Material und der Dicke abhängige Constante ist. Daher:

$$V = \frac{1}{2} B a \int_0^{2\pi} \left(\delta \frac{1}{\varrho}\right)^2 d\vartheta \quad . . . . (5)$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\varrho} = u + \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

und:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}\{1 - A_1 \cos\varphi - B_1 \sin\varphi - \cdots\},$$

denn bei den kleinen Gliedern kann der Unterschied zwischen φ und ϑ vernachlässigt werden.

Daher:

$$\delta\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}\Sigma\{(n^2 - 1)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\},$$

und:

$$V = \frac{B}{2a}\int_0^{2\pi} \{\Sigma\,(n^2-1)\,(A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta)\}^2\, d\vartheta$$

$$= \pi\,\frac{B}{2a}\,\Sigma\,(n^2-1)^2\,(A_n^2 + B_n^2)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(6);$$

worin die Summation über alle positiven ganzen Werthe von n auszudehnen ist.

Das Glied, für welches $n = 1$, steuert nichts zur potentiellen Energie bei, da es einer Verschiebung des Kreises als ein Ganzes, ohne Deformation entspricht. Wir sehen, dass die Ausdrücke für T und V nur Quadrate enthalten, wenn die Configuration des Systems wie oben durch die Coordinaten A_1, B_1 etc. definirt ist; in anderen Worten, diese Coordinaten sind die Normal-Coordinaten, deren unabhängige harmonische Variation die Schwingung des Systems angiebt.

Betrachten wir allein die $\cos n\vartheta$, $\sin n\vartheta$ enthaltenden Glieder, so haben wir, wenn für ϑ ein zweckmässiger Anfangspunkt gewählt wird:

$$\delta r = a A_n \cos n\vartheta, \quad \delta\vartheta = -\frac{A_n}{n}\sin n\vartheta\;.\;.\;.\;(7),$$

während die Gleichung, welche die Abhängigkeit zwischen A_n und der Zeit angiebt, lautet:

$$\sigma a^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\ddot{A}_n + \frac{B}{a}\,(n^2-1)^2 A_n = 0\;.\;.\;.\;(8),$$

woraus wir folgern, dass, wenn A sich wie $\cos(pt - \varepsilon)$ ändert, ist:

$$p^2 = \frac{B}{\sigma a^3}\cdot\frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(9).$$

Dieses Resultat wurde von Hoppe für einen Ring abgeleitet, in einer in Crelle Bd. 63, 1871, veröffentlichten Arbeit. Seine Methode ist, wenn auch vollständiger wie die vorhergehende, weniger einfach, da er nicht explicite erkannte, dass die betrachtete Bewegung einer vollkommenen Unausdehnbarkeit des Umfanges entspricht.

Nach Chladni verhalten sich die Schwingungszahlen der Töne eines Ringes wie:

$$3^2 : 5^2 : 7^2 : 9^2 \ldots$$

Beziehen wir jeden Ton auf den tiefsten der Reihe, so finden wir für die charakteristischen Octavenverhältnisse:

2,778, 5,445, 9, 13,44, etc.

Die entsprechenden Zahlen, die man aus der obigen theoretischen Formel erhält, indem man n successive gleich 2, 3, 4 etc. macht, sind:

2,828, 5,423, 8,771, 12,87 etc.;

dieselben stimmen ziemlich genau mit den experimentell gefundenen überein.

234. Ist $n = 1$, so wird die Schwingungszahl $= 0$, wie man voraussehen konnte. Die Hauptschwingungsart entspricht $n = 2$ und hat vier Knoten, die von einander um 90° entfernt sind. Diese sogenannten Knoten sind indessen nicht Orte, an denen vollständige Ruhe herrscht, denn die tangentiale Bewegung hat dort ein Maximum. In der That ist die tangentiale Schwingung in diesen Punkten die Hälfte des Maximums der normalen Bewegung. Im Allgemeinen beträgt für das $n$te Glied die Maximaltangentialbewegung $\frac{1}{n}$ von dem Maximum der normalen Bewegung und treten in den Knoten der letzteren auf.

Wird ein glockenförmiger Körper durch einen Schlag zum Tönen gebracht, so ist der Angriffspunkt des Schlages ein Ort, wo ein Maximum der normalen Bewegung der resultirenden Schwingungen vorhanden ist; dasselbe ist der Fall, wenn die Schwingungen durch einen Violinbogen erzeugt werden, wie das gewöhnlich in Vorlesungsversuchen geschieht. Glocken aus Glas, wie etwa Weingläser, werden indessen in regelmässige Schwingungen viel leichter durch Reibung mit dem rund um den Rand geführten angefeuchteten Finger versetzt. Die Tonhöhe der resultirenden Schwingung ist dieselbe wie die durch einen leichten Schlag mit dem weichen Theil des Fingers hervorgerufene; aber dadurch, dass man die tangentiale Bewegung einer schwingenden Glocke ganz allgemein nicht beobachtet

hat, ist auch die Hervorbringung des Tones auf diese Weise als eine schwierig zu erklärende Sache angesehen. Es ist jetzt kaum nothwendig hervorzuheben, dass die Reibung zunächst eine tangentiale Bewegung hervorruft, und dass der Angriffspunkt der Reibung die Stelle ist, wo die tangentiale Bewegung am grössten ausfällt, demnach auch die, wo die Normalbewegung verschwindet.

235. Die Existenz von tangentialen Schwingungen bei einer Glocke wurde auf folgende Weise nachgewiesen. Ein Luftpumpenrecipient wurde auf einem Tisch gut befestigt, mit dem offenen Ende nach oben, und dann mit dem befeuchteten Finger in Bewegung gesetzt. Ein kleines Stückchen im Rande, welches das Licht einer Kerze reflectirte, gab einen hellen Fleck, dessen Bewegung mit einer zweckmässig befestigten Coddingtonlinse beobachtet werden konnte. Wenn der Finger herumgeführt wurde, so sah man die Schwingungslinie sich mit einer Winkelgeschwindigkeit drehen, die das Doppelte der Geschwindigkeit des Fingers war; der Betrag der Excursion (der durch die Länge der Lichtlinie angegeben wurde) war, wenn auch variabel, doch in jeder Lage endlich. Es fand sich indessen einige Schwierigkeit bei der Beobachtung der Correspondenz zwischen der momentanen Geschwindigkeitsrichtung und der Lage des Erregungspunktes. Um dieses in genügender Weise zu leisten, ergab es sich als nothwendig, die Reibung in der Nachbarschaft eines Punktes wirken zu lassen. Dann wurde es evident, dass der Fleck sich tangential bewegte, wenn die Glocke an Stellen erregt wurde, die um 0, 90, 180 oder 270 Grad von jenem abstanden; und normal, wenn die Reibung in den dazwischen liegenden Punkten, entsprechend 45, 135, 225 und 315 Grad, ausgeübt wurde. Manchmal ist einige Sorgfalt erforderlich, um die Glocke in ihrer tiefsten Schwingungsart ohne eine merkliche Beimischung von Obertönen erklingen zu lassen.

Befindet sich auf irgend einem Punkte des Umfanges ein kleines Gewicht, so erfolgt eine kleine Vergrösserung der Pe-

riode, die verschieden darnach ausfällt, je nachdem der belastete Punkt mit einem Knoten der normalen oder der tangentialen Bewegung zusammenfällt. In dem letzteren Falle ist die gedachte Vergrösserung beträchtlicher wie in dem ersten. Der erzeugte Klang hängt demnach von dem Orte der Erregung ab; im Allgemeinen werden beide Töne gehört und geben dann durch Interferenz Veranlassung zu Schwebungen, deren Anzahl in der Secunde gleich der Differenz zwischen den Schwingungszahlen der beiden Töne ist. Diese Erscheinung kann oft bei grossen Glocken beobachtet werden.
